Orgaan van de
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 70
1994-1995 juni
8

Van algebra naar analyse

Wiskunde in een boorput

Integreren, of niet

Beveiliging tegen kopiëren

Themanummer Wiskunde B vwo

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per cursusjaar.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs. M.C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam.
Voor meer informatie: zie ‘Richtlijnen voor auteurs’ op bladzijde 282. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 2 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter
dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25, 8034 RA Zwolle, tel. 038-539985.
Secretaris
R.J. Bloem, Kornoelje 37, 3831 WJ Leusden
Ledenadministratie
F.F.J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-653218; fax 076-653218.
Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 65,00 per verenigingsjaar; voor studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de VVWL *f* 47,50; contributie zonder Euclides *f* 40,00.
Opgave van nieuwe leden aan de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

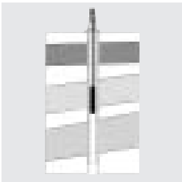
Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 71,00. Een collectief abonnement (6 exemplaren of meer) kost per abonnement *f* 48,00. Opgave bij de ledenadministratie (adres: zie boven).
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgiro hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer.
Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar.
Annuleringen dienen vóór 1 juli te worden doorgegeven aan de ledenadministratie.
Losse nummers *f* 12,50.

Advertenties

Advertenties sturen naar:
C. Hoogsteder, Prins Mauritshof 4, 7061 WR Terborg; tel. 08350-24337 of naar:
L. Bozuwa, Merwekade 90, 3311 TH Dordrecht; tel. 078-145522.

Inhoud



Voorwoord

Gezien de ontwikkelingen in de bovenbouw van het havo/vwo, en dan vooral ten aanzien van het B-programma voor het vwo, heeft de redactie gemeend een themanummer te moeten wijden aan wiskunde B op het vwo. Dit themanummer ligt thans voor u. Opgenomen zijn bijdragen die vanuit geheel verschillende gezichtshoeken zijn geschreven. Een lid van de Studiecommissie Wiskunde B vwo opent het nummer. Hij wordt gevolgd door professor Rinnooy Kan, voorzitter van het VNO en zelf wiskundige. Hij pleit voor ruimte voor toepassingen. Inderdaad zullen degenen die de (school-)wiskunde later gebruiken dat veelal doen in toepassingssituaties. Dat betekent nog niet dat het B-programma bijzonder contextrijk moet zijn. De redactie heeft gemeend wel ruim aandacht aan toepassingen te moeten geven, maar neemt hiermee niet het standpunt in dat deze het B-programma zouden moeten domineren. In de Korrel plaatst Jan de Lange een kanttekening bij de wijze waarop beleid gevoerd wordt. Op de werkbladen laat Vierkant voor Wiskunde een bewijs voor de dag komen.

In de komende jaargang neemt professor Rob Tijdeman ons mee in enkele lessen getaltheorie, en komt ook nog een bijdrage van Susanne Weber (K.N.M.I.).

De redactie

De Nederlandse Onderwijscommissie voor de Wiskunde (NOCW) heeft aan prof. dr. A. van Rooij gevraagd een artikel te schrijven over het advies van de Studiecommissie Wiskunde B voor het vwo, waarvan prof. van Rooij lid was. Omdat de NOCW het van belang vindt dat van de inhoud van dit artikel in brede kring kennis genomen kan worden, biedt zij het aan voor publicatie aan zowel Euclides als Nieuw Archief voor Wiskunde.

Het advies van de Studiecommissie Wiskunde B vwo

A. van Rooij

De Studiecommissie Wiskunde B vwo is op 23 mei 1993 ingesteld door Staatssecretaris Wallage om (ik parafraseer de instellings- en opheffingsbeschikking) de problemen te inventariseren die zich voordoen bij het onderwijs en het examen in het vak wiskunde B vwo en voorstellen te doen voor de oplossing daarvan. De commissie heeft in oktober '94 een eindrapport uitgebracht.
Als lid van de commissie is mij gevraagd, voor u een stuk te schrijven dat enigszins een beeld geeft van de overwegingen en de conclusies. Het volgende is geen democratisch tot stand gekomen samenvatting. Ik heb ernstig geprobeerd niet alleen mijn eigen stokpaardjes te berijden, maar het blijft mijn visie op het werk van de commissie. Van een ander lid had u een ander verhaal gekregen met (waarschijnlijk) andere accenten.
Er zijn allerlei onderwerpen aan de orde geweest die ik hier onbesproken laat. Zo heeft onze commissie een enquête onder vwo B-docenten uitgevoerd, waarop 938 antwoorden binnenkwamen. Op deze antwoorden ga ik in dit stuk niet in. Ze hebben echt wel een rol gespeeld in de discussies binnen de commissie,

maar ik wil het hebben over de opinies en de conclusies, niet over het commissiewerk zelf. De resultaten van de enquête zijn bewerkt en te vinden in het rapport van de commissie, voor de som van ƒ 15,– te verkrijgen bij het Freudenthal instituut te Utrecht. Daar kunt u ook de bewerkingen aantreffen van andere commissie-activiteiten zoals een enquête onder universitaire docenten, interviews door de Werkgroep Vrouwen en Exacte Vakken. U vindt er ook een samenvatting van ongevraagde schriftelijke reacties die ons van diverse kanten bereikt hebben.
Het is alleen maar comme il faut dat ik eerst even opmerk dat ik nooit aan een middelbare school gewerkt heb, maar dat ik al heel lang Analyse-onderwijs geef aan eerstejaars wiskunde- en natuurkundestudenten.

Een kwestie van mentaliteit

Sta mij toe dat ik begin met het aspect dat mij persoonlijk het meest bewogen heeft om aan het werk van de commissie mee te doen.
Iets dat mij erg opvalt bij pas aangekomen wiskundestudenten is dat ze zo vaak vragen of iets mag. ‘Mag ik links en rechts met *x* vermenigvuldigen?’ ‘Mag ik nu opschrijven dat…?’ Erger: als ik dan antwoord dat ze het gerust mogen opschrijven zijn ze content, en als ik vervolgens wil weten of ze hun conclusie wel kunnen verantwoorden kijken ze me aan of ik ze bedrogen heb. Nu weet ik ook wel dat ze eigenlijk bedoelden ‘Als ik nu opschrijf dat..., krijg ik er dan een rode streep doorheen?’ maar de zaak is dat dàt hun criterium is en niet hun eigen geweten.
Een andere vorm van hetzelfde verschijnsel is dat ze zich zo weinig rekenschap geven van de betekenis van de formules waar ze mee werken. Uit $x < a$ en $y < b$ concludeert iedereen feilloos dat $x + y < a + b$, maar het is frappant hoeveel er even onbekommerd uit halen dat $x - y < a - b$.
Natuurlijk is de ene student de andere niet, maar de meesten schijnen niet te beseffen dat ze zelf verantwoordelijk zijn voor wat ze zeggen en opschrijven. Toch is het essentieel voor de wiskunde, en als deze kwestie op school kennelijk zó weinig aan de orde geweest is, dan mankeert daar iets.
Wil in het onderwijs enig idee overgebracht worden van waar het bij wiskunde om draait, dan zullen we hier wat aan moeten doen. In deze conclusie voelt de commissie zich gesteund door de uitslagen van de enquêtes en de opiniepeilingen.
Dat universitaire docenten in het algemeen begrip (op elementair niveau) belangrijker vinden dan beheersing van technieken ligt misschien voor de hand, maar ook van de schooldocenten wenst ruim de helft meer aandacht voor redeneren en bewijzen (en vrijwel niemand wil minder).
Een moeilijkheid bij de realisering van deze wens is uiteraard de a priori gegeven omvang van het programma. Blijkens de enquête vinden drie van de vier schooldocenten het huidige programma overladen. Er zal zeker voor gezorgd moeten worden dat het niet zwaarder wordt. In ruil voor betere begripsvorming zullen onderwerpen die nu nog voorkomen moeten verdwijnen. De commissie is van mening dat dit inderdaad mogelijk is.

Consequenties

De leerling zal zich een andere mentaliteit eigen moeten maken. Idealiter dient hij zich voortdurend bewust te zijn van de betekenis van zijn uitspraken. Daartoe zal hij zich moeten aanwennen helder te redeneren en te formuleren. Het gaat hierbij niet om axiomatiek. De zin van axioma's zie je pas nádat je ervaring met wiskunde hebt opgedaan. Behoefte aan precieze redeneringen ontstaat op natuurlijke wijze als je begint met eenvoudige probleempjes over situaties die je kunt overzien, en daarna de complicatie opvoert. Of, zeg $3^{49} + 5^{12}$ deelbaar is door 7 is een elementaire en heel begrijpelijke vraag, maar voor het antwoord is een nauwkeurige redenering nodig, die je zonder veel theorie kunt ontdekken.
Moraal: Begin met een overzienbaar stuk wiskunde en eis dan exactheid, niet op het niveau van de beroepswiskundige maar op dat van de leerling. Analyse (in de zin van differentiatie en integratie) is hiervoor veel te gecompliceerd. De commissie stelt voor, een deel van het programma te wijden aan natuurlijke getallen (deelbaarheidskwesties) en getalrijen (inclusief convergentie).
Deze aanpak heeft een bijprodukt. Leerlingen die bezig zijn met een onderwerp waarvan het begrip binnen hun bereik ligt (en van wie dat begrip ook werkelijk gevraagd wordt) zullen eerder in staat zijn zelf oplossingen te bedenken en ook natuurlijk opkomende vragen te zien, creatief te zijn, en te zien dat wiskunde niet ooit door een hogere macht geopenbaard is, maar in de loop der tijden opgebouwd is door mensen zoals zij. In verband daarmee vindt de commissie het wenselijk, dat meer dan in het verleden aandacht besteed wordt aan geschiedenis: Hoe is de theorie ontstaan, en naar aanleiding waarvan?

Verdere overwegingen

Om praktische redenen zal het niet doenlijk zijn, het hele programma op deze leest te schoeien; ook voor Analyse heeft onze commissie een plaats ingeruimd. Ook daar dient

het streven naar meer begrip te worden bevorderd, of althans niet gehinderd. Het zal daarom nodig zijn, dat ook in de Analyse meer aandacht aan ondubbelzinnig taalgebruik besteed wordt. Er moet, bijvoorbeeld, duidelijk onderscheid gemaakt worden tussen termen als ‘functie’, ‘functievoorschrift’, ‘vergelijking’ en ‘gelijkheid’. Fundamentele begrippen als ‘functie’, ‘vergelijking’ en ‘oplossing’ dienen meer aandacht te krijgen , en in de loop van de jaren in verschillende contexten geplaatst te worden.
Een moeilijk punt in de besprekingen van onze commissie was de vraag wat er aan toepassingen van de wiskunde gedaan moet worden. Voor- en nadelen springen in het oog: toepassingen zijn motiverend en verhelderend; ze kosten tijd en vereisen niet-wiskundige kennis; ze geven problemen bij het examineren. Na lang beraad was de slotsom dat voor toepassingen binnen het totale wiskunde B-programma niet veel ruimte gereserveerd moet worden, maar dat wel plaats dient te zijn voor een onderwerp naar keuze van de leraar, te examineren via een schoolonderzoek en niet centraal.
Een andere kwestie is het gebruik van informatietechnologie. De ontwikkeling van de computeralgebra zal op den duur een belangrijke verschuiving in het Analyse-onderwijs teweegbrengen. Het klassieke functie-onderzoek wordt helemaal routinewerk zodra de goede apparatuur er is. Het resultaat is dat ruimte vrijkomt voor begripsvorming. Zover is het nog niet helemaal maar ook nu kan het functieonderzoek grotendeels vervallen en de begripsvorming gesteund worden door verstandig toepassen van informatietechnologie. Wel moet ervoor gezorgd worden dat het programma niet vastgepind wordt aan specifieke apparatuur en daarmee elke paar jaar verouderd is.

Het gewenste programma

De opdracht van de commissie omvatte niet het opstellen van een gedetailleerd programma. Toch volgt hier een schets van een programma, ter illustratie van de gedachten van de commissie en om te laten zien hoe het zou kunnen. De schets is heel globaal en daardoor weinig zeggend. Je kunt wel ‘het begrip afgeleide functie’ als onderwerp opvoeren, maar daarmee is nog volstrekt niet duidelijk hoe algemeen of tot in wat voor detail zoiets behandeld wordt. Dat kan ook niet in een programma aangegeven worden; daarvoor zou minstens steekproefsgewijs van een aantal onderwerpen een heel precieze afbakening gegeven moeten worden, bijvoorbeeld door uit te werken hoe een hoofdstuk van een schoolboek eruit kan zien, of wat voor opgaven de leerling voor ogen zou krijgen. In principe kan dat, en het rapport van de commissie geeft een paar voorbeelden; in het kader van dit artikel is dat ondoenlijk. Daarom alleen de lijst met onderwerpen. Deze lijst moet steeds gezien worden binnen het kader van twee krachtige aanbevelingen van de commissie: Besteed aandacht aan begripsvorming, en zorg dat het programma niet te zwaar wordt.
De stof is hier schattenderwijs verdeeld over tien blokjes van 25 lesuren, waarvan er drie het onderwerp ‘discrete analyse’ vormen, drie ‘continue analyse’, en drie ‘meetkunde’; het tiende blokje bevat een toepassing.

I.A. Grepen uit de getaltheorie
Onderwerpen:
- deelbaarheid van natuurlijke getallen
- de grootste gemene deler, algoritme van Euclides
- priemgetallen, hoofdstelling van de getaltheorie
- rekenen modulo *n*, restklassen
- de kleine stelling van Fermat in verband met het testen van primaliteit

I.B. Rijen en recursie
Onderwerpen:
- volledige inductie
- eindige en oneindige rijen, verschilrijen
- recursief gedefinieerde rijen en asymptotisch gedrag

I.C. Convergentie van rijen
Onderwerpen:
- limiet van een rij

- convergentie
- rekenregels voor limieten
- sommeerbare meetkundige rijen
- decimale ontwikkeling van rationale en irrationale getallen

II.A. Differentiëren
Onderwerpen:
- raaklijn van een grafiek
- het begrip afgeleide functie
- rekenregels voor het differentiëren
- het differentiëren van rationale functies, wortelfuncties, exponentiële functies, logaritmische functies en goniometrische functies

II.B. Functie en grafiek
Onderwerpen:
- kritische analyse van grafieken
- berekening van extreme waarden
- numerieke methoden

II.C. Bewegingen in het vlak
Onderwerpen:
- bewegingsvergelijkingen, parametervoorstelling van een kromme
- snelheidsvector en raaklijn
- spiraalkrommen, cycloïde, cardioïde, figuren van Lissajous

III.A. Incidenties in de ruimte
Onderwerpen:
- onderlinge ligging van punten, lijnen, vlakken in de ruimte
- redeneren vanuit enkele grondregels
- construeren in ruimtefiguren
- hoeken en afstanden
- parallelprojectie en centrale projectie

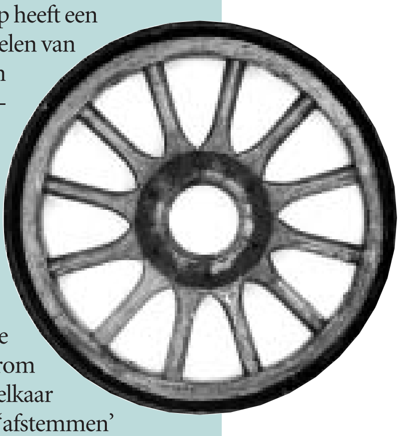
III.B. Vlakke meetkunde
Onderwerpen:
- invariante eigenschappen van vlakke figuren bij parallelprojectie en centrale projectie
- verhouding en dubbelverhouding

Studiecommissie Wiskunde B vwo, van links naar rechts: mevr. drs. A. Breeman, prof. dr. A.C.M. van Rooij, prof. dr. J. de Lange (voorzitter), mevr. drs. A. Verweij, dr. J.A. van Maanen, drs. J.W. Maassen, prof. dr. P.L. Cijsouw.

Korrel

De uitvinding van het wiel

De (struc)stuurgroep Profielen heeft contouren geschetst van vernieuwingen in de bovenbouw van het vwo en havo. Contouren van structuren. En hoe vaag dat ook klinkt: die kloppen nog niet eens. Zo dreigt een verantwoorde invulling van het vak wiskunde voor het havo ernstig bekneld te raken tussen de structuren.
Het ministerie pleegde een ingreep: wiskunde wordt uit het algemeen verplichte deel verwijderd. Daarmee benadrukkend dat wiskunde geen algemeen vormend karakter heeft.
Inhouden vindt men niet terug in de plannen van de stuurgroep. Die inhouden worden immers ontwikkeld door vakontwikkelgroepen met vakinhoudelijke deskundigen? En wel heel erg snel, want op 20 juni vindt de veldraadpleging plaats. De vakontwikkelgroep heeft een grote vrijheid in het ontwikkelen van acht examenprogramma's en mag het wiel opnieuw uitvinden. Dus veldraadpleging en inhoudelijke experimenten lijken op hun plaats.



Inhoud stond voorop bij de Studiecommissie Wiskunde B. Dat verklaart waarschijnlijk dat geen enkel lid van de Wiskunde B-commissie in de vakontwikkelgroep zit. Waarom ook inhoud en structuur op elkaar afstemmen? De vaardigheid 'afstemmen' moet waarschijnlijk nog in het studiehuis ontwikkeld worden.
Het ministerie heeft in april besloten dat er geen project komt om de nogal revolutionaire plannen van de vakontwikkelgroep van inhoud te voorzien. Het tijdpad moet gehaald worden, de zaak niet onnodig complex, en de vakinhouden niet vernieuwd. Terwijl de leek dacht dat de stuurgroepplannen op inhoudelijke vernieuwing waren gericht.
VSNU, NOCW, NVvW, Vakontwikkelgroep en Freudenthal instituut hebben in niet mis te verstane bewoordingen geprotesteerd.
Structuurvernieuwingen zonder inhoud - dat wiel wordt op het ministerie steeds weer uitgevonden.

Jan de Lange

- oneigenlijke punten van het vlak
- bijzondere lijnen in een driehoek
- harmonische ligging en volledige vierhoek
- dualiteit

III.C. Meetkunde en analyse
Onderwerpen:
- vectoren in een driedimensionaal rechthoekig assenstelsel, inprodukt en loodrechte stand
- analalytische voorstellingen van lijn, cirkel, schroeflijn, vlak, cilinder, kegel, bol
- raaklijnen en vlakken
- inhoudsberekening met toepassing van de analyse

IV. Toepassingen (naar keuze)
Naar keuze een van de volgende onderwerpen:
- cryptosystemen (bijvoorbeeld het RSA-systeem)
- discrete dynamische modellen
- optimaliseringsproblemen
- de wetten van Kepler
- kaartprojecties
- construeren in perspectief
- een onderwerp naar keuze te bepalen door de docent

Wiskunde B en de samenleving

A.H.G. Rinnooy Kan

Een wereld zonder wiskunde is niet voorstelbaar, zeker niet voor (ex)wiskundigen. En een (ex)wiskundige die thans de belangen van het bedrijfsleven behartigt, voegt daar zonder aarzeling aan toe: een economie zonder wiskunde is ook niet voorstelbaar. Wie daaraan nog mocht twijfelen, kan zich dagelijks laten overtuigen door berichten in de media. De moderne industrie laat zich niet denken zonder hoogwaardige technische produktieprocessen, waaraan wiskundige inzichten ten grondslag liggen, en laat zich ook niet denken zonder een hoogwaardige besturing van die produktieprocessen die eveneens gebaseerd is op wiskundige modelbouw. Waar de mens teruggedrongen wordt en vervangen wordt door de perfectie van de automaat, gebeurt dat zonder uitzondering op basis van wiskundige analyse, of het nu gaat om de robot, de spraakcomputer of het schaakprogramma dat aan de lopende band grootmeesters weet te kloppen. Computers leveren dag en nacht meer gegevens aan ten dienste van de besturing van economieën en ondernemingen dan ooit voor mogelijk werd gehouden, en de verwerking van al die gegevens is opnieuw een taak waar de wiskunde de basis voor moet leggen, variërend van descriptieve conjunctuuranalyse tot normatieve kwaliteitsbewaking. Goederenstromen in steeds grotere volumina gaan in steeds hoger tempo over de wereldmarkt van hot naar her, voorafgegaan door en opgevolgd door stromen van geld en informatie, en het is opnieuw de wiskunde die het instrumentarium biedt dat orde kan scheppen in deze niet altijd alleen ogenschijnlijke chaos. Ja, het is zelfs alleen de wiskunde die de chaos zelf analyseerbaar, hanteerbaar en verklaarbaar wist te maken.

Als een economie zonder wiskunde niet voorstelbaar is, dan heeft een economie zonder wiskundigen weinig kans van overleven. Aan die wiskundigen is behoefte, maar breder nog is de behoefte aan belangstelling en waardering voor het vakgebied dat zij vertegenwoordigen. Zelfs wie niet de pure wiskunde of informatica als specialiteit kiest, krijgt met wiskunde te maken en zal zich niet kunnen permitteren daar met een schrikreactie afstand van te nemen. Goed en aanstekelijk wiskunde-onderwijs is van essentiële betekenis. Er valt op dit vakgebied nog een hardnekkig negatief vooroordeel bij scholieren, studenten en hun ouders weg te werken.

Het is dan ook een gelukkige zaak dat een studiecommissie nog eens kritisch gekeken heeft naar het wiskunde-B pakket van het vwo. Verstandig is het ook dat daarbij is uitgegaan van uitgebreid veldonderzoek bij universiteiten en in het voortgezet onderwijs zelf. Dat onderzoek leidt mede tot aanbevelingen voor de inhoud van het vak wiskunde-B die mij in het algemeen buitengewoon verstandig lijken. Ik kan mij met name goed voorstellen dat de commissie bezorgd is over de omvang van het vak voor het profiel Natuur en Techniek, waar toch de basis gelegd moet worden voor de opleiding van de hoog gekwalificeerde technische specialisten waarnaar het bedrijfsleven in Nederland nu al af en toe tevergeefs op zoek gaat. Als op één punt de commissie nog wel iets ambitieuzer had mogen zijn, dan is het wat mij betreft op het punt van de toepassingen van de wiskunde. Daar kan, volgens de commissie, 'niet veel ruimte voor worden ingeruimd'. Het spreekt vanzelf dat de wiskunde zelf voorop moet blijven staan, maar juist om jonge leerlingen (en in het bijzonder meisjes) te motiveren voor een in eerste aanleg abstract ogend vak als wiskunde zijn goede en actuele toepassingen essentieel. Er ligt hier een mogelijke relatie met de door de commissie bepleite grotere variatie in schooltoetsen - naast schriftelijke toetsen ook mondelinge toetsen en projectwerk, eventueel zelfs door groepen uit te voeren. Juist die grotere variatie zou aan kunnen sluiten bij een grotere variatie in de wijze waarop onderwerpen worden aangeboden. Verlevendiging en diepgang hoeven elkaar hier absoluut niet uit te sluiten.

Ieder die intensief met de wiskunde heeft kennis gemaakt, herkent de door de commissie genoemde verrassendheid en elegantie als wezenskenmerken van het vakgebied. Maar daarnaast is wat wel de onberedeneerbare bruikbaarheid van wiskunde wordt genoemd ook een belangrijk aspect van het vak. Wie langs die route tot de wiskunde bekeerd wordt, kan in het 21-ste eeuwse Nederland een meer dan nuttige bijdrage leveren.

Dit artikel gaat over de aansluiting van het nieuwe onderbouwprogramma op de huidige bovenbouw van havo en vwo. Op de vraag naar mogelijke knelpunten bij die aansluiting wordt vrijwel altijd 'algebra' genoemd. Grote zorg bestaat dan over de aansluiting op wiskunde B. Volgend schooljaar gaat de eerste lichting 'basisgevormde' leerlingen naar de derde klas havo en vwo. Misschien een goed moment om stil te staan bij de rol van algebra in dit en het vorige onderbouwprogramma. Er zijn duidelijke verschillen tussen deze programma's. Of die verschillen uitpakken ten nadele van het nieuwe programma is de vraag.

Van algebra naar analyse

Kees Hoogland

Algebraïsche vaardigheid

Het probleem van de algebra en de voorbereiding op wiskunde B verdient het om wat meer uiteengerafeld te worden.
In het oude onderbouwprogramma nam het letterrekenen een belangrijke plaats in. Het letterrekenen gebeurde met vormen als $a^2 + 7a - 18$, a^2bc^3/ab^4c^6, $4p^2 - 24pq + 9q^2$, die veel ingewikkelder waren dan de formules en functievoorschriften die op datzelfde moment aan de orde waren. De legitimatie was dat vaardig zijn in het manipuleren als belangrijkste hulpmiddel werd gezien voor het oplossen van wiskundige problemen. Het oefenen vond extensief plaats, meestal zonder dat de daadwerkelijk op te lossen problemen, waarvoor de oefening uiteindelijk nodig was, in zicht waren. Bovendien werden veel technieken stuk voor stuk en redelijk geïsoleerd aangeboden. Ik ben van mening dat veel leerlingen hebben geleerd 'optisch' te manipuleren. Daarmee bedoel ik dat leerlingen in geïsoleerde situaties leerden om manipulaties uit te voeren volgens een van te voren aangeboden vergelijkbaar voorbeeld. Zo werden letters verplaatst (naar links, naar rechts) of verwijderd (wegstrepen), en werden haakjes geplaatst of verdreven, soms zelfs zonder dat het achterliggende idee van vermenigvuldigen en delen nog expliciet aan de orde werd gesteld. Als nu later, bijvoorbeeld in de bovenbouw, een beroep gedaan wordt op deze vaardigheden om daarmee functies en verbanden te analyseren, blijken veel leerlingen niet thuis te geven. Als vaardigheden aangeleerd worden los van de bijbehorende probleemsituaties is het later op het juiste moment toepassen van die vaardigheden natuurlijk uiterst lastig.

Algebraïsche expressies

Laten we eens even stil staan bij een aantal algebraïsche expressies zoals die in onderbouw aan de orde kwamen:

a $2x + 4 = 2(x + 2)$
b $2x + 4 = 10$
c $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$
d $y = ax + b$
e $x = -b/2a$
f $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
g $a \cdot b = b \cdot a$

Komen deze expressies voor in een redelijk geïsoleerd hoofdstuk voorzien van een aantal locale didactieken, dan vinden wij dat de leerlingen de door deze expressies gesuggereerde handelingen moeten beheersen. Als je ze zo bij elkaar zet dan spreekt er toch wel enige inconsistentie uit onze pogingen.

Beantwoordt u eens de volgende vragen:
- Wat is precies de rol van het =-teken in de expressies a, b, e en g?
- Welke rol spelen de gebruikte letters? Zijn het onbekenden, variabelen of parameters?
- Bij welk wiskundig probleem horen nu precies de verschillende expressies?

Vooral e is het summum van letterabstractie: een variabele wordt vastgelegd door hem uit te drukken in de parameters van de bijbehorende maar onzichtbare tweedegraadsfunctie.
En wat dacht u van f? Betreft het hier variabelen? Of misschien parameters? Volgens mij geen van dit al; het is een door middel van letters geformaliseerd rekenvoorschrift. In een brugklasdeel bij het vorige leerplan stond $a \cdot b = b \cdot a$ nog gemeld. Wij herkennen dat natuurlijk onmiddellijk als de commutativiteit van de vermenigvuldiging in een lichaam. Voor de leerlingen is het nooit meer geweest dan het nogal overdreven formeel noteren van een trivialiteit.

Algebra in de bovenbouw

Leerlingen maken zowel bij wiskunde A als bij wiskunde B veel fouten die te maken hebben met algebraïsche misconcepties. Bij leerlingen heeft vaak het idee postgevat dat het uitvoeren van een algebraïsche manipulatie of een algebraïsch algoritme een algemeen geldende en werkende oplossingsstrategie is.
Een paar voorbeelden.
- Leerlingen in 6 vwo die van een functie als $f{:}x \rightarrow 2x^3 + 4x^2$ het voorschrift vereenvoudigen tot $f{:}x \rightarrow x^3 + 2x^2$
- Leerlingen in 5 havo die de vergelijking $\frac{20}{d} = 4$ niet kunnen oplossen. Niet omdat ze niet weten of kunnen verzinnen dat je 20 door 5 moet delen om 4 te krijgen, maar omdat ze in een spaghettiberg van algoritmen het juiste algoritme niet kunnen vinden. Merkwaardig genoeg gaat $\frac{20}{d} = \frac{4}{1}$ meestal beter.
- Leerlingen in 5 vwo die zeer in de war raken als de expressies $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ en $\sin 2x = \cos x$ vlak bij elkaar op het bord staan. Er zijn genoeg leerlingen die niet kunnen uitleggen wat nu precies het verschil is tussen de onuitgesproken betekenissen die beide expressies hebben.
- Een wiskundestudent aan de lerarenopleiding met een wiskunde B-achtergrond die aan het eind van een ingewikkelde opgave over kegelsneden op de volgende manier zijn berekening afmaakt:
$\frac{9}{25}x^2 = 1 \rightarrow x^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$.

Deze leerlingen hebben in de onderbouw óf niet genoeg geoefend met algebraïsche manipulaties óf zij hebben dat niet op een effectieve en toepasbare manier geleerd. Ik neig naar het laatste.
Ik wil vervolgen met een bespreking van de algebra/analyse zoals die waarschijnlijk in de derdeklasboeken voor zal komen. De verschuiving van algebra naar analyse die daar zichtbaar wordt, kan een nieuw licht werpen op de aansluiting.

Van algebra naar analyse

Om de titel van het artikel wat te verhelderen eerst een opgave met twee verschillende uitwerkingen.

Geef de lineaire formule behorend bij de rechte lijn door (1 , 3) en (4 , 18).

Eigenlijk moet u eerst zelf even deze opgave oplossen en dan verder lezen.

Uitwerking 1:
$y = ax + b$

$18 = 4a + b$
$3 = a + b$

$15 = 3a$
$-3a = -15$
$a = \frac{-15}{-3} = 5$
$b = -2$
$y = 5x - 2$

Uitwerking 2:
y = hellingsgetal $\cdot\, x$ + startwaarde.Van het ene punt naar het andere is 3 naar rechts en 15 omhoog.
Het hellingsgetal is dus $\frac{15}{3} = 5$.
$y = 5 \cdot x$ + startwaarde.
Als je 1 invult voor x moet er 3 uitkomen.
$3 = 5 + \ldots$
De startwaarde moet wel -2 zijn.
$y = 5x - 2$.

Wat zijn nu precies de kenmerkende verschillen?
Bij uitwerking 1 worden de gegevens omgezet in een algebraïsch stelsel, dat vervolgens algebraïsch wordt opgelost. Aan het eind moet dan wel nog even bedacht worden wat precies berekend is. De gevraagde algebraïsche handelingen hebben op zich niets of nauwelijks iets te maken met de kern van het probleem.
Bij uitwerking 2 moet er een mentaal beeld aanwezig zijn van een rechte lijn. Er wordt bedacht wat de parameters in de formule precies voorstellen. Dan wordt gericht gezocht naar het hellingsgetal en vervolgens naar de andere parameter.
Uitwerking 1 noem ik de algebraïsche benadering (manipuleren), uitwerking 2 de analytische benadering (rol van parameters, grafiek in gedachten).

Analyse in klas drie

In de derde klas zal ongeveer de

helft van de tijd besteed worden aan analyse, net zo veel als voorheen aan algebra en analyse.
De volgende formules/grafieken zullen aan de orde komen.
- rechte lijnen
- parabolen
- hyperbolen
- hogere-machtsformules
- exponentiële formules

Wat direct opvalt is de diversiteit aan soorten verbanden. Dat is niet het enige verschil. Ook het werken met deze formules is van een andere orde dan voorheen. Bij elk type formule hoort een eigen soort technieken; analytische technieken die direct te maken hebben met de problemen die door de formule of de grafiek worden opgeroepen.

We lopen de verschillende verbanden even langs.
Bij parabolen ($y = ax^2 + bx + c$) is het van belang dat de leerlingen een mentaal beeld hebben van de bijbehorende grafiek. Ze moeten in staat zijn de top en de nulpunten te vinden. Belangrijke technieken zijn dus in factoren ontbinden, de abc-formule en manieren om de top te vinden.
Bij hyperbolen

($y = \frac{a}{x} + b$)

is ook het mentale beeld van de grafiek van belang. Leerlingen moeten het effect van a en b op de grafiek ten opzichte van de standaardgrafiek van $y = \frac{1}{x}$ kunnen duiden.
Belangrijke technieken zijn verschuivingen en vermenigvuldigingen in de formule kunnen verwerken en eventueel het numeriek onderzoeken van asymptotisch gedrag.
Bij hogeremachts-formules als $y = ax^n$ is vooral het kunnen oplossen van de vergelijking $x^n =$ getal van belang.
Bij hogeremachts-formules met een gedaante als $y = a \cdot x^n + b \cdot x + \ldots$ verliezen de bekende algebraïsche technieken al snel hun waarde. Andere technieken om toch zicht te krijgen op dergelijke formules zijn: via tabellen inzoomen en daarmee onderzoek doen naar extremen en snijpunten en de kenmerkende vorm voor de verschillende machten.
Ook zal de exponentiële functie $e = b \cdot g^t$ aan de orde komen. Handig bij allerlei groeiprocessen, onder andere bij steeds terugkerende procentuele groei.
Kenmerkend is de steeds aanwezige aandacht voor de hele formule en de bijbehorende grafiek. Losse vormen (of functievoorschriften) zullen nauwelijks meer voorkomen. De focus is op het verband tussen de variabelen en de grafiek daarbij. Goed zicht op de structuur van formules maakt ook het oplossen van vergelijkingen, de grootste 'vrager' van algebraïsche vaardigheden, inzichtelijker.
De vergelijking

$\frac{12}{x} - 3 = 7$

kan algebraïsch opgelost worden. Wordt er bij de oplossing steeds gerefereerd aan het omkeren van de verschuivingen en de vermenigvuldigingen, dan kun je zeggen dat er sprake is van analytisch oplossen. Een techniek overigens die werkt bij elke vergelijking die hoort bij een formule die is ontstaan uit een standaardformule.

Analyse in de bovenbouw

De hier geschetste tendens komt natuurlijk niet zo maar uit de lucht vallen. In de bovenbouw bij wiskunde B zien we het verschil tussen analyse en algebra ook terug. Traditioneel werden functies onderzocht met een sterk algebraïsch onderzoek. Voor leerlingen was het vaak moeilijk in te zien waarom er wel functies aan bod kwamen als $x \to xe^x$, $x \to x \ln x$ en $x \to x^3 - x$, maar geen functies als $x \to x - e^x$, $x \to x + \ln x$ en $x \to x^3 - x + 1$. Weet u het nog?
De laatste jaren is er veel meer aandacht voor functies die afgeleid kunnen worden uit standaardfuncties. Steeds vaker wordt de grafiek gegeven en worden daar vragen over gesteld. De aansluiting met de analyse van wiskunde B zal geen grote problemen geven als een groter beroep gedaan wordt op de aangeleerde analytische vaardigheden en minder op de kale algebraïsche vaardigheden.
Als de schoolboeken en de examens binnen de marges van het vastgestelde programma meer de analytische kant uitgaan, dan kan er een redelijke aansluiting bewerkstelligd worden. Geen perfecte aansluiting, daarvoor is de sfeer van met name wiskunde B op het vwo vooralsnog toch te algebraïsch van traditie. Een traditie die niet zomaar over zal zijn. In het toekomstige programma voor de Tweede Fase zal de analytische lijn mogelijk consequenter worden voortgezet.

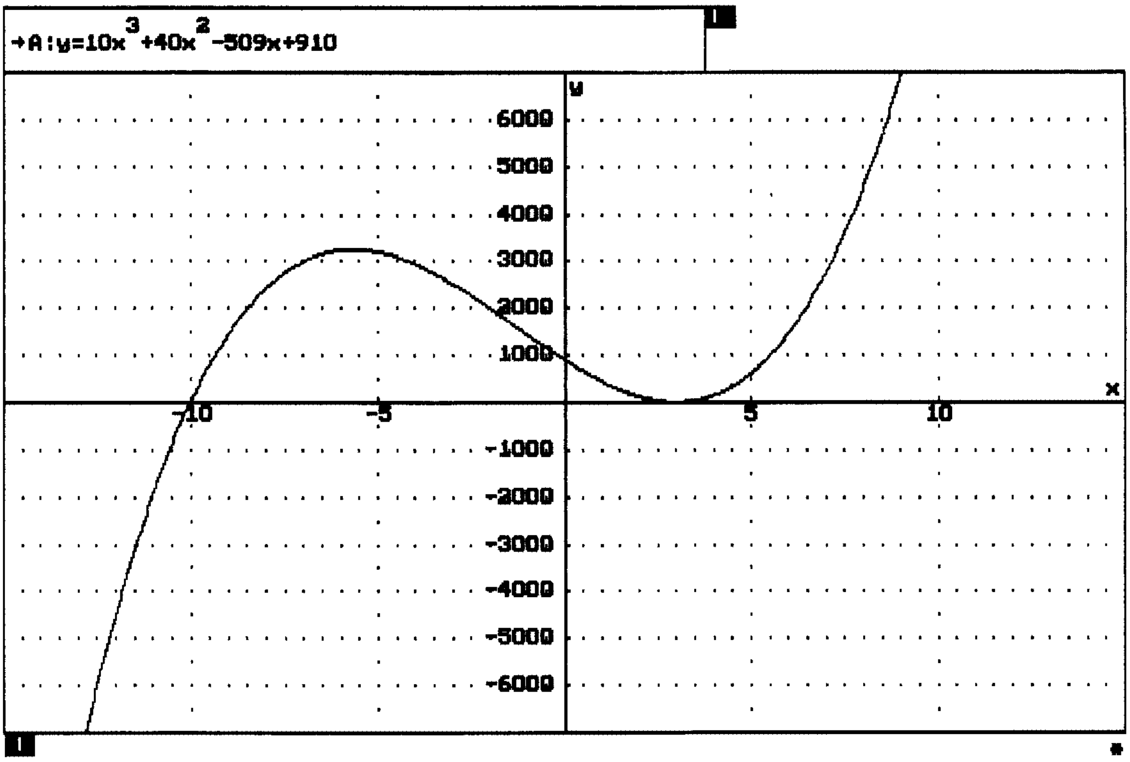
Het toekomstige programma

In de toekomstige bovenbouwprogramma's voor de Tweede Fase zal de rol van analyse ongetwijfeld sterker worden. Enerzijds omdat de toepasbaarheid daarvan een belangrijke rol speelt bij vervolgopleidingen, en anderzijds omdat er in de toekomstige Tweede Fase in het algemeen een groter beroep gedaan zal worden op allerlei analyserende vaardigheden.
Ten slotte nog twee voorbeelden van wat ik analytische wiskunde noem in tegenstelling tot algebraïsche wiskunde.

1. Voor welke waarde van k heeft de functie $f: x \to \sin x + \sin kx$ een maximum 2?
Gaat u het volgende stelsel oplossen?

$\sin x + \sin kx = 2$
$\cos x + k\cos kx = 0$
Of gaat u misschien met grafieken en somfuncties aan de slag? Vergis u niet, het sommetje is moeilijker dan u denkt. Bewijst u maar eens of uw gevonden verzameling oplossingen compleet is. Mooie wiskunde levert dat op en mooie analyse. En misschien een aardige voorbereiding op Fourierreeksen.

2. Gegeven is de functie
$f: x \rightarrow 10x^3 + 40x^2 - 509x + 910$
De grafiek staat hieronder.
a Volgens de grafiek lijken er nulpunten te liggen bij $x = -10$ *en bij* $x = 3$. *Controleer dit.*
b Bewijs met de factorstelling dat $x = -10$ *het enige nulpunt is.*



Een aardig voorbeeld van hoe binnen de analyse algebraïsch handelen en bewijzen kunnen samengaan. Zulk soort opgaven zou ik graag zien in het nieuwe bovenbouwprogramma voor bijvoorbeeld Natuur en Techniek.
De vakontwikkelgroep wiskunde is hard bezig, misschien bij het verschijnen van dit artikel inmiddels al klaar, met formuleren van nieuwe examenprogramma's voor de profielen in de bovenbouw. De discussie over welk wiskundeonderwerp in welk profiel een plaats krijgt zal waarschijnlijk een groot gedeelte van de discussietijd vergen. In mijn visie is het minstens net zo belangrijk dat er nagedacht wordt over de manier waarop de onderwerpen vorm krijgen. Het louter omschrijven van de wiskundige inhouden zal niet genoeg zijn om de nieuwe vakken eenduidig richting te geven. Komt er in de nieuwe plannen expliciet te staan dat de ontwikkeling toegaat naar een meer analytische wiskunde met passende voorbeelden daarbij? Of wordt het gewoon weer een lijstje met onderwerpen? We zullen zien.

Tot slot

De uitdaging voor de derde klas is met leerlingen een idee te ontwikkelen van wat analyserende wiskunde kan zijn. Laat de leerlingen maar eens louter door te kijken naar formules de grafieken zeer ruw schetsen. Met algebraïsche en analytische technieken kan preciezer tekenen daarna wel aan de orde komen. Laat bij de leerlingen een goed beeld ontstaan van wat de rol is van parameters in een formule. Laat de leerlingen een groot scala aan formules eens met de rekenmachine numeriek en met de computer grafisch onderzoeken.
Als u een docent bent met van nature een analytische aanpak van problemen dan kunt u zo nog wel een paar van dit soort ideeën verzinnen. Bent u een docent met van nature een zeer algebraïsche aanpak van problemen dan zal er zorg blijven bestaan over uw aansluiting.

Wiskunde in een boorput

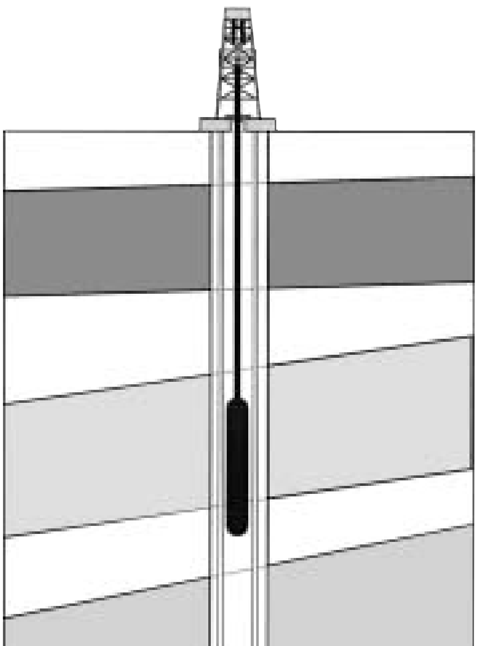
Jos Alkemade

Inleiding

In de praktijk komt men veel problemen tegen die voor een groot of klein deel om een stuk wiskunde vragen. Zo ook in de olie-industrie, waar het volgende voorbeeld over 'nucleaire magnetische resonantie' (NMR)-metingen in een boorput vandaan komt. Dit voorbeeld laat zien hoe verschillende onderdelen van de wiskunde, zoals analyse en lineaire algebra, samen nodig zijn om een praktijkprobleem aan te pakken.

Het NMR experiment

In een put, die geboord is voor oliewinning, worden tal van metingen verricht om inzicht te krijgen omtrent de gesteenten en de aanwezige hoeveelheid olie of gas.



figuur 1 Het doen van metingen (logging) in een boorput

Men laat het meetapparaat, een zogenaamde *logging tool*, in de put zakken en doet om de (zeg) 30 centimeter een meting (zie figuur 1).

Eén van de metingen is gebaseerd op *nucleaire magnetische resonantie* of NMR. Een permanente magneet zorgt er voor dat alle magnetische spins van de vloeistof (olie en/of water) in de poriën van het gesteente in dezelfde richting worden gepolariseerd. Met een spoel wordt dan een kortstondige verstoring geïnduceerd, waardoor de spins een tik krijgen. Na deze tik relaxeren de spins 'langzamerhand' naar de oorspronkelijke richting. Met dezelfde spoel wordt de polarisatie (de afwijking ten opzichte van deze oorspronkelijke richting) gedurende een bepaalde tijd geregistreerd. Deze meting wordt op elke diepte opnieuw gedaan.

De mate van relaxatie heeft te maken met onder andere de porositeit van het gesteente en de verhouding van olie en water: hoe groter de poriën of hoe meer water, hoe trager de relaxatie verloopt. Metingen van de polarisatie kunnen ons hierin derhalve inzicht verschaffen.

Het wiskundige model

Met de functie $t \rightarrow f(t)$ beschrijven we de polarisatie als functie van de tijd in milliseconden (ms). In goede benadering kan $f(t)$ geschreven worden als een som van e-machten. Voor drie e-machten wordt dat:

$$f(t) = a_1 e^{-t/\tau_1} + a_2 e^{-t/\tau_2} + a_3 e^{-t/\tau_3} \qquad (1)$$

De getallen τ_i heten de *relaxatietijden* en a_i de *relaxatie-amplituden*. Deze *modelparameters* zijn gerelateerd aan de poriëngrootte en de olie-water verhouding. Dit *model* levert ons een verzameling polarisatiefuncties. Bij elke keuze van de modelparameters hoort één zo'n functie.

Gedurende een bepaalde tijd, zeg 100 ms, wordt de polarisatie elke Δt ms gemeten. Een typische waarde voor deze *bemonsteringstijd* Δt is 2 ms. Zo krijgt men

een reeks waarnemingen y_k, $k = 0, \ldots, T$, waarvoor geldt

$$y_k = f(k\Delta t) + \varepsilon_k$$

De *meetruis* ε_k is het gevolg van onnauwkeurigheden van de meetapparatuur en externe storingen. Wegens deze meetruis is er in de hele verzameling polarisatiefuncties niet één te vinden waarvoor $f(k\Delta t)$ precies gelijk is aan de metingen y_k. We zullen dan ook tevreden moeten zijn met een benadering: we zoeken die f die zo goed mogelijk bij de metingen past. De parameters die deze functie karakteriseren vertellen ons dan iets over de poriëngrootte en de olie-water verhouding.

Voordat we gaan bekijken hoe we die functie kunnen vinden, voeren we de matrixnotatie in om de formules begrijpelijk te houden.

De matrixnotatie

We voeren de 3-*dimensionale* kolomvector a in:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

die we de amplitudevector noemen, en de *matrix* E met $T + 1$ rijen en 3 kolommen:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{-\Delta t/\tau_1} & e^{-\Delta t/\tau_2} & e^{-\Delta t/\tau_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-T\Delta t/\tau_1} & e^{-T\Delta t/\tau_2} & e^{-T\Delta t/\tau_n} \end{pmatrix}$$

Voor de $(T + 1)$-dimensionale kolomvector Ea geldt dus

$$(Ea)_k = a_1 e^{-k\Delta t/\tau_1} + a_2 e^{-k\Delta t/\tau_2} + a_3 e^{-k\Delta t/\tau_3} = f(k\Delta t)$$

De relaxatie-amplituden

Om de polarisatiefunctie die zo goed mogelijk bij de metingen past te kunnen vinden, moeten we een methode ontwerpen, waarmee we de modelparameters uit de metingen kunnen schatten.

We merken op dat f *niet-lineair* van de relaxatietijden afhangt, maar *lineair* van de amplituden. Deze separatie-eigenschap hebben De Groen en De Moor [1] benut bij het ontwerpen van een methode, waarmee eerst de relaxatietijden τ_i worden bepaald en daarna de amplituden a_i. Binnen het bestek van dit artikel zou het te ver voeren om de gehele methode te behandelen. We zullen ervan uitgaan dat we de waarden van de relaxatietijden τ_i kennen. De enige onbekenden zijn dan nog de amplituden a_i. Een veel gebruikte methode om deze amplituden te schatten is de *kleinste kwadraten methode*. De *kleinste kwadraten schatting* is de amplitudevector, waarvoor het kwadratische verschil

$$\sum_{k=0}^{t} ((Ea)_k - y_k)^2$$

zo klein mogelijk is. Deze uitdrukking kunnen we zien als $F(a)$, waar F een *functie* van de 3-dimensionale ruimte $\mathbb{R}^3$ van amplitudevectoren naar de reële getallen $\mathbb{R}$ is. We moeten dus de vector a^* vinden waarvoor de functie F haar minimum aanneemt. Dit kunnen we doen door de afgeleide van F naar elke a_i nul te stellen en de betreffende vergelijkingen op te lossen. Omdat het verband tussen de metingen en de amplituden lineair is, is dit eenvoudig. We kunnen de kleinste kwadraten schatting expliciet opschrijven:

$$a^* = (E'E)^{-1}E'y \qquad (2)$$

In deze formule is y de $(T + 1)$-*dimensionale* vector

$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \\ y_T \end{pmatrix}$$

en de matrix E' de zogenaamde *getransponeerde* van E (de rijen van E' zijn per definitie de kolommen van E). De bovenindex -1 geeft aan dat we de *inverse* van de (3 bij 3) matrix $E'E$ moeten nemen. De voordelen van het gebruik van de matrixnotatie worden duidelijk als we proberen formule (2) op te schrijven zonder hiervan gebruik te maken.

Bij de geschatte amplituden a_i^* behoort op haar beurt een polarisatiefunctie f^*:

$$f^*(t) = a^*_1 e^{-t/\tau_1} + a^*_2 e^{-t/\tau_2} + a^*_3 e^{-t/\tau_3}, \qquad (3)$$

die normaal gesproken zal verschillen van de ‘echte’ functie f. Deze functie noemen we de *fit* (de functie die zo goed mogelijk past).
De formules (2) en (3) kunnen we implementeren in een computerprogramma, zodat met één druk op de knop de amplituden en de bijbehorende polarisatiefunctie uit de metingen kunnen worden bepaald. Een *interpretatie* van de geschatte waarden (van de amplituden) geeft ons dan inzicht in de grootte van de poriën en de olie-water verhouding. En daar was het ons allemaal om begonnen.

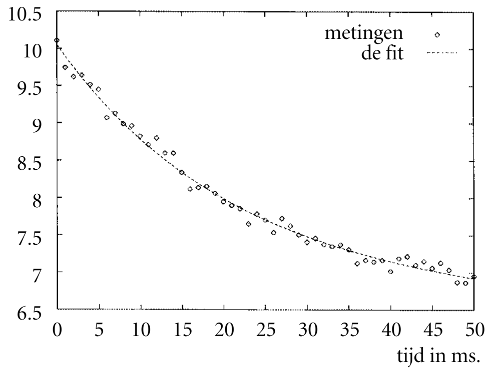
Een simulatie

We hebben zojuist gezien hoe we de amplituden kunnen bepalen uit de metingen. In de praktijk is het gebruikelijk om een rekenmethode – hier de kleinste kwadraten methode – te testen: werkt het zoals we ons hadden voorgesteld? Dit gebeurt door het 'draaien' van *simulaties*. We veronderstellen de parameters bekend. We evalueren de bijbehorende functie in de bemonsteringstijden $k\Delta t$. De metingen worden gesimuleerd door computer-gegenereerde *random* getallen, die de meetruis voorstellen, daarbij op te tellen. Met behulp van het computerprogramma worden vervolgens de – nu onbekend veronderstelde – parameters uitgerekend. Deze kunnen we dan vergelijken met de parameters die we erin hadden gestopt.

Ter verduidelijking doen we zo'n simulatie. We nemen voor de relaxatietijden de volgende waarden, welke representatief zijn voor de praktijk: $\tau_1 = 20$ ms, $\tau_2 = 100$ ms en $\tau_3 = 1000$ ms. In onze simulatie nemen we voor de amplituden de waarden $a_1 = 3$, $a_2 = 0$ en $a_3 = 7$. De bijbehorende polarisatiefunctie f is dan

$$f(t) = 3e^{-t/20} + 7e^{-t/1000}.$$

Merk op dat de term met $e^{-t/100}$ hier niet in voorkomt, omdat $a_2 = 0$. We nemen als bemonsteringstijd $\Delta t = 2$ ms en we meten 100 ms lang, zodat het aantal metingen $T + 1 = 51$ is (omdat $T\Delta t = 100$ en we bij $t = 0$ beginnen te meten). Hierbij worden de *random* getallen opgeteld. In dit voorbeeld zijn deze getrokken uit een normale verdeling met gemiddelde 0 en standaardafwijking 0,1.



figuur 2 De gesimuleerde metingen en de berekende polarisatiefunctie

Uit deze gesimuleerde metingen, die in figuur 2 zijn weergegeven met ruitjes, heeft het computerprogramma, afgerond op twee decimalen, de amplitudevector

$$a^* = \begin{pmatrix} 3{,}04 \\ -0{,}02 \\ 7{,}03 \end{pmatrix}$$

berekend. De *berekende* polarisatiefunctie (de fit) is dus

$$f^*(t) = 3{,}04e^{-t/20} - 0{,}02e^{-t/100} + 7{,}03e^{-t/1000}.$$

We merken op dat dit niet precies de functie is waarmee we begonnen zijn, maar ze lijkt er wel veel op. We kunnen dus zeker tevreden zijn met het resultaat. Ter illustratie is de grafiek van f^* getekend in de figuur, samen met de metingen. We zien dat ook de fit aanvaardbaar is: de metingen liggen netjes om deze grafiek verspreid.

Wiskunde is méér dan rekenen

Formule (2) levert ons rechtstreeks de amplituden op basis van de metingen. De aanwezigheid van meetfouten heeft echter tot gevolg dat geen van de amplituden exact gereconstrueerd kan worden: er zit een bepaalde onzekerheid in, die bovendien voor elke afzonderlijke amplitude verschillend kan zijn. We kunnen aanvoelen (kwalitatief!) dat deze onzekerheid kleiner wordt naarmate we nauwkeuriger, langer, of vaker meten. Met behulp van formule (2) is het mogelijk deze onzekerheid te kwantificeren voor een gegeven ruisniveau, tijdsduur en bemonstering. Zo'n analyse stelt ons in staat voor elk van de berekende amplituden de onzekerheid aan te geven. Bovendien kunnen we de analyse gebruiken om omgekeerde vragen te beantwoorden, zoals: 'Hoe lang moeten we minimaal meten om een vooraf gegeven nauwkeurigheid te halen?' We zullen dit hier niet verder uitwerken, maar het zal duidelijk zijn dat de wiskunde ons meer geeft dan alleen een rekenmethode.

Een slotopmerking

Aan de hand van een vereenvoudigd voorbeeld heb ik geprobeerd duidelijk te maken wat wiskunde *in* en *voor* de praktijk kan betekenen. Een aantal belangrijke wiskundige aspecten zijn de revue gepasseerd: de modelvorming, het invoeren van geschikte notaties, het analyseren. Ook zien we dat een computer een onmisbaar hulpmiddel is bij het in de praktijk brengen van wiskunde. Zonder de computer zouden we de berekening amper kunnen uitvoeren: bij het uitrekenen van de matrix E moeten we 150 maal(!) de functie $x \rightarrow e^{-x}$ evalueren en het toepassen van formule (2) kost ons nog eens *minimaal* 450 optellingen en even zoveel vermenigvuldigingen. En dan te bedenken dat deze berekening voor elke diepte in de boorput opnieuw gedaan moet worden. Ga daar maar aan staan!

Noot

1 P. de Groen en B. de Moor, The fit of a sum of exponentials to noisy data, J. Comp. Appl. Math. 20 (1987) 175-187.

Informatie-technologie in het nieuwe wiskunde B-programma

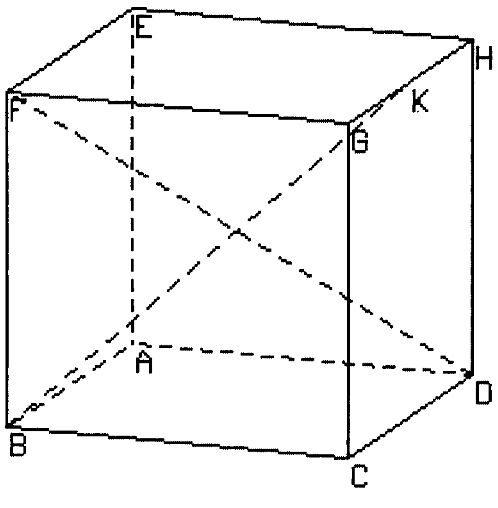
Ramiro Wanga

Inleiding

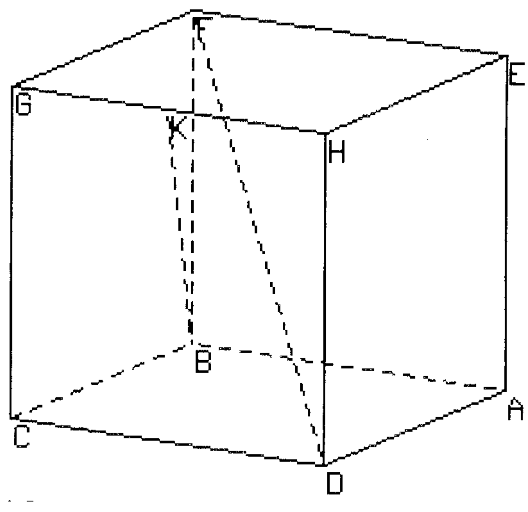
Op de school waar ik werk, het Cals College te Nieuwegein, is het gebruik van de computer iets waar leerlingen niet meer van opkijken. Ze zijn vertrouwd geraakt met het apparaat. Ook in de wiskundeles wordt regelmatig met de computer gewerkt. Naast de computer heb ik in 5 vwo en 4 havo bij wiskunde B ook de grafische rekenmachine gebruikt. Op grond van deze ervaringen ben ik het in grote lijnen eens met de voorstellen van de Studiecommissie Wiskunde B vwo voor zover deze nieuwe technologieën betreffen. Hier en daar heb ik echter wel enkele kanttekeningen geplaatst.

Inpassen van nieuwe technologieën

Volgens de Studiecommissie is het van belang om bij het opstellen van een nieuw programma voor wiskunde B rekening te houden met de bestaande technische mogelijkheden en met toekomstige mogelijkheden. Met het eerste ben ik het van harte eens, maar het tweede lijkt mij niet haalbaar. CD-I, CD-ROM, CAS en wat er in de toekomst nog meer op de markt verschijnt, kunnen mogelijkheden brengen waar we op dit moment niet aan denken of durven te denken. Maar ook als we wel een idee zouden hebben van wat de toekomstige mogelijkheden zijn, moeten we rekening houden met het feit dat het lang kan duren voordat deze binnen het bereik van onze leerlingen komen.
Dat de Studiecommissie zelf ook niet zo ver vooruit kijkt, blijkt uit het volgende voorbeeld. In het rapport van de commissie wordt bij het (nieuwe) onderdeel incidenties in de ruimte opgemerkt: ‘Bewijzen uit het ongerijmde (bijvoorbeeld ter adstructie van het kruisen van twee lijnen) verdienen expliciete aandacht’ (pag. 69). Leerlingen bij ons op school kunnen nu al, als ze op de computer met zo’n meetkundeprogramma werken, door het draaien van de figuur laten zien dat twee lijnen elkaar niet snijden, maar kruisen (zie de figuren 1a en 1b). Een bewijs uit het ongerijmde is dan niet meer nodig.
Moet je bij het formuleren van een examenprogramma nu al rekening houden met de mogelijkheden van



figuur 1a Snijden of kruisen de lijnen *DF* en *KB* elkaar?

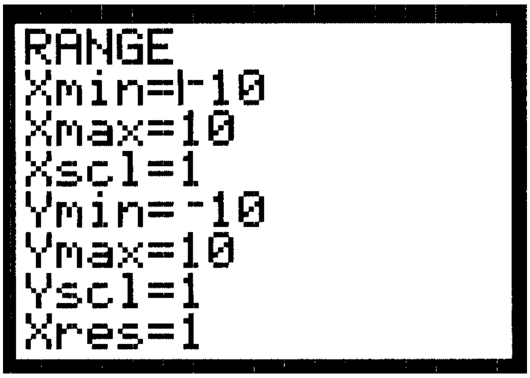


figuur 1b Deze tweede projectie laat zien dat er geen snijpunt is, dus *BK* en *DF* kruisen elkaar

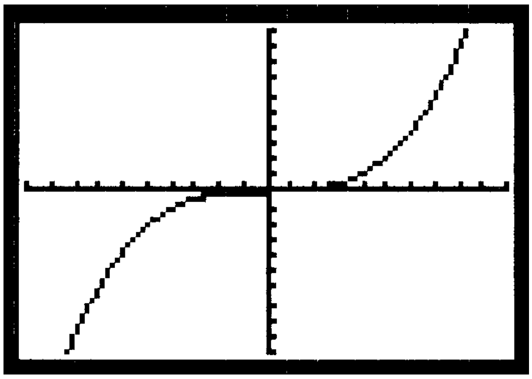
dit soort meetkundeprogramma's, die bijvoorbeeld ook doorsneden kunnen tekenen? Volgens mij niet. Het zal nog wel even duren voordat zoiets op een grafische rekenmachine (zakcomputer) draait die voor leerlingen betaalbaar is. Voorlopig is deze programmatuur nog maar voor een beperkt aantal leerlingen, en alleen als zij in het computerlokaal kunnen werken, bereikbaar. Zolang niet alle leerlingen er op elk moment van de dag over kunnen beschikken, zullen we moeten blijven eisen dat meetkundige constructies (ook) met potlood, geodriehoek en papier uitgevoerd kunnen worden.
Overigens zou in één opzicht wel goed op het toekomstige gebruik van informatietechnologie op school vooruit gelopen kunnen worden. Grafische rekenmachines zijn programmeerbaar en dit betekent dat leerlingen tevoren allerlei formules kunnen intypen die later met een druk op een knop opgeroepen kunnen worden. Zodra deze machines bij de eindexamens gebruikt mogen worden, is het dus afgelopen met de eis dat leerlingen nogal wat formules uit het hoofd moeten kennen. Het waarom van deze eis is mij nooit duidelijk geweest. Als iemand een formule niet meer weet, heeft dat dan met gebrek aan wiskundig inzicht te maken? Het lijkt mij opportuun om hier zo snel mogelijk verandering in te brengen. De Studiecommissie stipt het probleem alleen aan. Waarom heeft zij niet voorgesteld om bij de wijziging van wiskunde B vwo direct het gebruik van een formuleboekje bij de examens toe te staan?

Begrip en inzicht

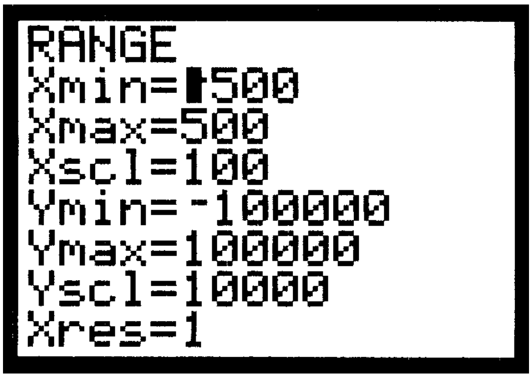
In het rapport staat dat er nog geen harde bewijzen zijn dat het computergebruik werkelijk een positieve bijdrage heeft geleverd vanuit het leerperspectief. En dat als er een positief effect lijkt te zijn, dit vooral optreedt bij niet inhoudelijke maar algemene doelen en houdingen.
Het is inderdaad moeilijk om harde bewijzen ten aanzien van inhoudelijke doelen te geven. Het werken met de computer heeft namelijk invloed op de inhoudelijke doelen zelf. Het beïnvloedt de leerstof die wordt aangeboden, de manier van verwerken en het toetsen van de stof. Nieuwe vaardigheden ontstaan door het gebruik van de computer terwijl er oude zullen verdwijnen omdat ze aan de computer overgelaten kunnen worden. Een eerlijke vergelijking van de leerresultaten met die van leerlingen die geen gebruik maken van computers tijdens de lessen is daardoor niet goed mogelijk.
Maar ook zonder harde bewijzen ben ik overtuigd van de positieve aspecten van computergebruik in de wiskundeles. Uiteraard is goede software met bijbehorend lesmateriaal hiervoor een vereiste. Ik heb ervaren dat vooral programma's die een open leeromgeving bieden inzichtverhogend kunnen werken. Vroeger hadden leerlingen bijvoorbeeld veel problemen met het tekenen van de grafiek van een goniometrische functie. Waar toen maar één of misschien twee grafieken in een les getekend werden, kunnen leerlingen nu door de computer of de grafische rekenmachine in vijf minuten tien verschillende grafieken laten tekenen en deze met elkaar vergelijken. Het resultaat is dat niet alleen het tekenen geen probleem meer is, maar dat ook de relatie tussen het functievoorschrift en de grafiek voor de leerling dui-



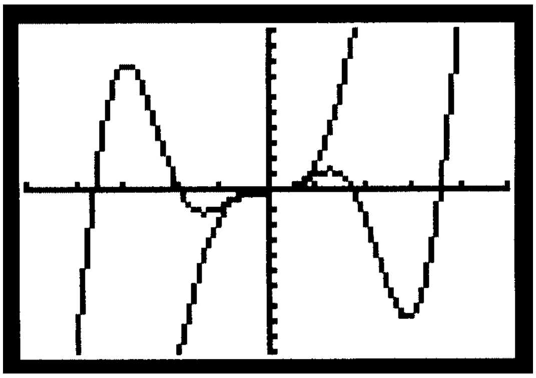
figuur 2a Tekengebied voor $y_1 = x^2 \sin x$ en $y_2 = 0{,}0174\,x^3$



figuur 2b Grafieken van $y_1 = x^2 \sin x$ en $y_2 = 0{,}0174\,x^3$



figuur 3a Tekengebied voor $y_1 = x^2 \sin x$ en $y_2 = 0{,}0174\, x^3$



figuur 3b Grafieken van $y_1 = x^2 \sin x$ en $y_2 = 0{,}0174\, x^3$

delijk is. Voorspellen wat er met de grafiek gebeurt als een parameter verandert, is een vaardigheid die leerlingen die met de computer of de grafische rekenmachine gewerkt hebben heel goed beheersen.
Het werken met dit soort software inspireert leerlingen ook om zelf te gaan experimenteren en de meest ingewikkelde formules uit te proberen. Dit ongericht zoeken levert meestal geen begrip op. Toch kunnen bij toeval ontstane problemen leerlingen soms helpen om meer inzicht te krijgen. Zo kwam een keer een leerling aan het eind van de les bij mij met zijn grafische rekenmachine waarop hij de grafieken van $y_1 = x^2 \sin x$ en $y_2 = 0{,}0174x^3$ had laten tekenen. Hij was begonnen met de eerste en zag tot zijn verbazing dat er geen 'slingergrafiek' ontstond. Het leek op de grafiek van een derdegraads functie. Na enig proberen had hij de factor 0,0174 gevonden. De twee grafieken pasten precies op elkaar (zie de figuren 2a en 2b). Hij vroeg mij nu waarom de grafiek van y_1 op de grafiek van een derdegraads functie leek en waar die 0,0174 vandaan kwam.
Dat de leerling geen slingergrafiek kreeg, was te verklaren uit het feit dat zijn rekenmachine op 'graden' (DEG) stond en niet op 'radialen' (RAD). En zo was het domein ($-10 < x < 10$) dat hij had gekozen niet groot genoeg om de slingerbeweging te zien. De factor 0,0174 kon nu gemakkelijk verklaard worden door gebruik te maken van $\sin x \approx x$ als x in de buurt van 0 zit. De functie die hij had ingetypt was eigenlijk $x \rightarrow \sin(\pi x/180)$ en als $-10 < x < 10$ dan is $-\pi/18 < \pi x/180 < \pi/18$.
Dus is $\sin(\pi x/180) \approx \pi x/180 \approx 0{,}01745x$ want $\pi x/180$ zit in de buurt van 0. Als de leerling een groter domein had genomen, zou hij wel een slingergrafiek gekregen hebben. Deze gaat echter niet zo vaak op en neer als je zou denken (zie de figuren 3a en 3b).
Bij dit voorbeeld komen belangrijke aspecten van computergebruik en wiskunde naar voren. Een experiment levert een onverwacht resultaat op, dit zet de leerling aan het denken en het motiveert om een antwoord te vinden op de vraag wat er niet klopt. Wiskundig gezien komen hier limieten aan bod, het omzetten van radialen in graden en omgekeerd en het letten op het domein waarop de grafiek wordt getekend. Dit voorbeeld illustreert ook dat leerlingen ten aanzien van programmatuur een kritische houding aannemen en niet alles zomaar accepteren.

Moeilijkheid

Door het gebruik van de computer of de grafische rekenmachine zijn routinevragen, zoals 'onderzoek de functie' voor het tekenen van een grafiek, niet meer nodig. Het gevolg is dat leerlingen niet meer lekker kunnen scoren op dit soort vragen. De toetsen en het examen zullen meer op inzicht gericht worden. Dit wordt door sommige leraren als een verzwaring gezien.
Ik ben daar niet zo bang voor. Door het gebruik van de nieuwe technologie zal er ook in de lessen meer tijd aan begrip en inzicht besteed kunnen worden en de leerlingen zullen een andere (meer onderzoekende) houding krijgen. Bovendien leren ze om verschillende strategieën te gebruiken om problemen op te lossen. Trial en error (of beter trial en improve) wordt vaak als een inferieure methode gezien. Is

dit echter niet de methode die wiskundigen zelf ook vaak gebruiken? Met behulp van computer en rekenmachine kunnen gemakkelijk en snel veel verschillende gevallen bekeken worden. Leerlingen moeten er uiteraard op gewezen worden dat ze naderhand zelf een generalisatie of een bewijs moeten geven van de gevonden resultaten. Abstraheren is tenslotte iets wat typisch bij wiskunde hoort.

Tot slot

Terecht merkt de commissie op dat de organisatie rondom computergebruik en de beschikbaarheid van hardware en software een obstakel vormen en kunnen blijven vormen voor het gebruik van de computer in het wiskundeonderwijs. Ook de onbekendheid van vele docenten met de software die op de markt is, bevordert het computergebruik niet. Nascholing is dus nodig.
Ik hoop van harte dat zowel voor de aanschaf van hardware en software als voor nascholing er van uit het ministerie voldoende financiële middelen komen om computergebruik een integraal deel van de wiskundelessen te laten worden.

Ieder jaar, begin september, als de eerstejaars voor het eerst in de collegebanken zitten, gonst het door de zaal. Waarom wiskunde? Ik studeer toch scheikunde! Hebben we dat dan niet geleerd bij Wiskunde B? En, ontbreekt er nog meer? Een relaas uit de Groningse praktijk over waar Wiskunde B ophoudt en Wiskunde voor Scheikunde begint.

Waarom wiskunde? Ik studeer toch scheikunde!

Roel Verstappen

Wiskunde voor Scheikunde

In de eerste twee en een halve maand van hun studie lopen alle eerstejaars (Technische) Scheikunde aan de Rijksuniversiteit Groningen twee, ongeveer even zware, colleges: Algemene Chemie A en Wiskunde A. Beide vakken zijn breed van opzet. Algemene Chemie A beoogt een overzicht te geven van de chemie; Wiskunde A bestaat uit de onderdelen differentiaal- en integraalrekening, complexe getallen, lineaire algebra, differentiaalvergelijkingen, functies van meerdere variabelen, vector-analyse, lijnintegralen en meervoudige integralen. Een vol programma, dat wordt gegeven aan de hand van (een deel van) het bijna 1400 pagina's tellende boek van Erwin Kreyszig [1].

De nadruk ligt op het aanleren van wiskundige technieken, die de studenten in het vervolg van hun studie moeten kunnen toepassen. Op het moment dat in een college scheikunde de Schrödinger-vergelijking op het bord verschijnt, wordt de student geacht met complexe getallen, eigenfuncties enzovoorts om te kunnen gaan. De inhoud is bepaald vanuit dit perspectief, dat wil zeggen vanuit de

vraag wat moet in het wiskundevakje van de gereedschapskist van een scheikundige? De volgende som uit de vierde week van het college schetst de sfeer.

Bungy-jumping

Een m kilogram zware bungy-jumper staat boven op een hoge brug. Hij is met een elastiek ter lengte l meter (in ongerekte toestand) verbonden aan de brug: het ene uiteinde van het elastiek zit vast om zijn linker enkel; het andere uiteinde is bevestigd aan de brug. Onder hem gaapt een diepe afgrond. To spring ... or not to spring? Om deze kwestie te onderzoeken, beschouwen we een eenvoudig wiskundig model. We nemen aan dat de springer loodrecht naar beneden zal vallen en noemen zijn afstand tot de brug u. Deze afstand zal van de tijd t afhangen: $u = u(t)$. Zijn verticale snelheid v is per definitie gelijk aan de tijdsafgeleide van u en dus geldt $v(t) = u'(t)$. We laten het begin van de sprong samenvallen met $t = 0$ en nemen aan dat hij met een gegeven snelheid van v_0 meter per seconde van de brug afspringt. Dus geldt: $u(0) = 0$ en $u'(0) = v_0$. Gedurende de eerste l meters van zijn val is de invloed van het elastiek te verwaarlozen. Zijn afstand tot de brug wordt dan beschreven door de differentiaalvergelijking $mu'' = mg$, waarbij g de zwaartekracht-versnellings-constante is. Bepaal de afstand $u(t)$ gedurende dit deel van zijn sprong. Het tijdstip waarop hij precies l meter is gevallen noemen we t_0 waaruit volgt dat $u(t_0) = l$. Bepaal t_0 en toon aan dat $u'(t_0) = \sqrt{v_0^2 + 2gl}$.

Vanaf het tijdstip $t = t_0$ zal het elastiek zijn val gaan remmen. De differentiaalvergelijking voor de afstand van de springer tot de brug luidt in dat geval $mu'' = mg - k(u - l)$, waarbij de constante k afhangt van het materiaal waaruit het elastiek is opgebouwd. Bereken voor $t \geq t_0$ de afstand $u(t)$. Daar $u(t)$ nu bekend is voor alle tijdstippen t kunnen we het maximum van u bepalen en nagaan of dit maximum kleiner is dan de afstand tussen het brugdek en het aardoppervlak …

Na de propedeuse wordt de gereedschapskist verder aangevuld en worden de achtergronden van de technieken uitgediept. De mate waarin dit gebeurt hangt af van de afstudeerrichting. Voor aspirant scheikundig ingenieurs is deze uitbreiding het omvangrijkst: ongeveer tien procent van de studie Technische Scheikunde bestaat uit wiskunde.

Wiskunde B: meer doorkijkjes!

De metafoor ‘gereedschapskist’ vat de modale ex-vwo’er niet als hij of zij aan zijn of haar universitaire studie scheikunde begint. Wiskunde B in het vwo geeft geen goed beeld van de wiskunde. Uit het rapport van de studiecommissie Wiskunde B [2] blijkt dat slechts een op de drie wiskunde-docenten in het vwo het (een beetje) eens is met de stelling dat Wiskunde B een goed beeld geeft van wat wiskunde is. De vraag ‘wat is wiskunde?’ is buitengewoon moeilijk. Het is ook niet redelijk te veronderstellen dat in het vwo een volledig antwoord op deze vraag gegeven kan worden. Wel kan een beeld geschetst worden dat meer motiveert en enthousiasmeert. Hierbij spelen toepassingen en doorkijkjes naar wat er allemaal met wiskunde gedaan wordt een sleutelrol.

Weersvoorspellingen

Een doorkijkje. Weersvoorspelling en wiskunde. Of: waarom Erwin Krol wel met zijn handen moet wapperen als hij aangeeft waar de buien zullen vallen. Ter illustratie volgt hieronder een summiere uitwerking van dit doorkijkje. Om het weer te voorspellen worden weermodellen doorgerekend. Een weermodel is een wiskundige beschrijving van de stroming in de atmosfeer, meestal opgesteld door natuurkundigen of meteorologen. Een wiskundige studie van dit type model leert dat alle weermodellen zeer gevoelig zijn voor hele kleine verstoringen in de begintoestand, dat wil zeggen dat een kleine meetfout in het weer van vandaag enorme gevolgen kan hebben voor de voorspelling van het weer van straks. Om deze reden is het weer moeilijk te voorspellen. Dit fenomeen, deterministische chaos, is aanschouwelijk te maken aan de hand van eenvoudige, voor de vwo-leerling begrijpelijke voorbeelden, bijvoorbeeld aan de hand van de logistische afbeelding. In referentie [3] wordt op een overeenkomstige wijze de doorrekening van stromingsmodellen toegelicht. Natuurlijk is het niet de bedoeling om alle ins en outs van de chaostheorie of numerieke simulatiemethoden te doceren. Maar wel om een beeld te schetsen, om leerlingen te motiveren, te enthousiasmeren, zodat ze, als ze later scheikunde (of iets anders) gaan studeren, niet twijfelen aan het nut van wiskunde, aan het doel, maar weten waarom Erwin zo met zijn handen wappert. Daarom wiskunde. En waarom nog meer? Redenen te over.

Een doorkijkje is veelal een toepassing van de wiskunde die in zijn volle omvang veel te hoog gegrepen is voor het vwo. De bedoeling is verhalenderwijs het probleem te schetsen, de rol van de wiskunde te benadrukken, en de essentie (of misschien zelfs maar een onderdeel) aan de hand van een aanschouwelijk, uitdagend wiskundig probleem uit te werken. De vraag

‘waarom wiskunde?’ past niet in het centraal schriftelijk. Beeldvorming hoort wel bij Wiskunde B, opdat leerlingen inzien ‘daarom wiskunde!’

Een nog gladdere aansluiting

Meer doorkijkjes, meer motivatie en meer enthousiasme dus. Als eerstejaarsstudenten weten waarom hun scheikunde-studie met een wiskunde-college begint, dan is er een hoop gewonnen. Afgezien van de doorkijkjes, vormt het huidige Wiskunde B-programma een goede voorbereiding op Wiskunde voor Scheikunde. Echte aansluitproblemen, zoals het volledig ontbreken van bepaalde kennis of vaardigheden, zijn er niet of nauwelijks. Toch kan de aansluiting nog net iets gladder. Met (meer) ruimtemeetkunde, numerieke wiskunde en computer-algebra in het Wiskunde B-programma wordt de stap van Wiskunde B naar Wiskunde voor Scheikunde verkleind.

Meer ruimte voor de $\mathbb{R}^3$. Begrippen als symmetrie, rotatie en spiegeling spelen een belangrijke rol bij molecuulmodellen, kristallenvormen, en dergelijke. Het watermolecuul H_2O bijvoorbeeld heeft twee symmetrievlakken, die loodrecht op elkaar staan. Het NH_3-molecuul verandert niet van vorm door een rotatie over 120° rondom de hoofdas. Zo zijn er nog talrijke voorbeelden te geven. Vectoren en lineaire (symmetrische, anti-symmetrische en orthogonale) afbeeldingen in de $\mathbb{R}^3$ vinden veel toepassing in de scheikunde. Dit geldt ook voor de begrippen als projectie (inproduct) en moment (uitproduct). Qua moeilijkheidsgraad en omvang zou ruimtemeetkunde in het vwo aan bod kunnen komen, net als vroeger in Wiskunde I en II. Stukjes uit het oude programma kunnen – in een nieuw jasje – terugkeren in het vwo-programma. De hiervoor benodigde ruimte zou gevonden kunnen worden door bijvoorbeeld iets minder aandacht te besteden aan het onderwerp functie-onderzoek.

Integratie van numerieke methoden in een vroeg stadium van de analyse. In de scheikunde, en in heleboel andere toepassingen, zijn wiskundige problemen veelal niet met potlood en papier exact op te lossen, maar moet en kan worden volstaan met numerieke benaderingen. Denk bijvoorbeeld aan de berekening van een bepaalde integraal waarvan de bijhorende primitieve niet bekend is. Het moment waarop in het Wiskunde B-programma het begrip integraal wordt gerelateerd aan het begrip oppervlak, is het meest natuurlijke moment om numerieke benaderingen voor het oppervlak aan te geven en aldus het begrip numerieke integratie te introduceren.

Invoering van computer-algebra. Vraag het Mathematica. Zo dagen wij de eerstejaars in de eerste week van het college uit hun eindexamen Wiskunde B te maken met behulp van het computer-algebra pakket Mathematica. Voor de meesten gaat dan een wereld open. Het reeds in het vwo invoeren van computer-algebra heeft belangrijke voordelen. De omvang van het onderdeel functie-onderzoek kan verminderen (zie boven); numerieke methoden die onderdeel uitmaken van het computer-algebra pakket kunnen relatief eenvoudig in het onderwijs worden geïntegreerd (zie boven); de visualisatie verbetert (denk bijvoorbeeld aan het roteren van moleculen); sommen die op zich zeer geschikt zijn (bijvoorbeeld om de begripsvorming te vergroten, of om de relatie met de praktijk aan te geven), maar nu niet in het programma zijn opgenomen, omdat ze nogal wat rekenwerk (of tekenwerk) vergen, kunnen met behulp van een computeralgebra pakket gemaakt worden; koudwatervrees met betrekking tot computergebruik neemt af.
De ervaringen met computeralgebra, mits goed gedoseerd, zijn in het eerstejaars onderwijs vrijwel zonder uitzondering positief.

Noten

1 Erwin Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics, zevende druk, John Wiley, New York, 1993.

2 Rapport Studiecommissie Wiskunde B vwo, Utrecht, 1994.

3 A.E.P. Veldman: Vloeiende getallen, Natuur en Techniek, pag. 994-1003, december 1993.

Integreren, of niet

Jan M. Aarts

Gezichtspunt

Het Rapport van de Studiecommissie Wiskunde B vwo laat zien dat een programmawijziging een ingewikkeld proces is waarbij met alles en iedereen rekening gehouden moet worden. Ik zal het rapport bekijken vanuit mijn positie van universitair docent en daarbij ook nader ingaan op enkele punten van het rapport waar verwezen wordt naar het universitair onderwijs.

Programma-omschrijving

Eerst een opmerking vooraf. Lang geleden waren er goede en intensieve contacten tussen het vwo en de universiteit.
Door de mondelinge examens werden de universitaire docenten in ieder geval een keer per jaar geconfronteerd met de wiskundekennis van de eindexamenkandidaten. Ook vormden deze examens een goede gelegenheid om de contacten tussen de docenten van het vwo en de universitaire docenten te verstevigen. Het is jammer dat deze contacten op een enkele uitzondering na er niet meer zijn. Daarom ook is er op de universiteiten weinig besef van al de wijzigingen die er in de loop der jaren in het vwo hebben plaatsgevonden. Dit is een reden om de wens van de Commissie voor een duidelijke en vooral uitvoerige programma-omschrijving te onderstrepen.

Redeneren en bewijzen

Wat uit het Rapport heel duidelijk naar voren komt, is de roep om meer aandacht voor redeneren en bewijzen. Het blijkt dat 78% van de ondervraagde universitaire docenten vindt dat er in het programma meer of veel meer aandacht moet zijn voor redeneren en bewijzen en dat 75% van mening is dat er op het examen meer tot veel meer aandacht moet zijn voor vragen waarbij de redenering belangrijker is dan het antwoord.
In het Rapport staat dan ook als een van de vele voorwaarden waaraan een nieuw programma moet voldoen: ‘het moet leerlingen in staat stellen zich te bekwamen in aspecten van wiskundig redeneren’. En verder: ‘Van universitaire zijde is herhaaldelijk opgemerkt dat de keuze van de feitelijk te behandelen onderwerpen ondergeschikt is aan een wiskundig-correcte en inzichtelijke behandeling van die onderdelen’. Ik kan de genoemde wensen voor een groot deel onderschrijven. In het huidige programma ligt de nadruk op de technische vaardigheden en krijgt het verwerven van begrip en inzicht weinig aandacht. Het mag een troost zijn dat we met deze problemen niet alleen staan. In een redactioneel artikel in Focus, het nieuwsblad van de Mathematical Association of America, van december 1994 wordt vastgesteld dat er bij het onderwijs (zowel in ‘high schools’ als in ‘colleges’) te veel tijd wordt verdaan met het *hoe* van het differentiëren en integreren, maar nauwelijks aandacht wordt besteed aan het *wat* en *waarom*.

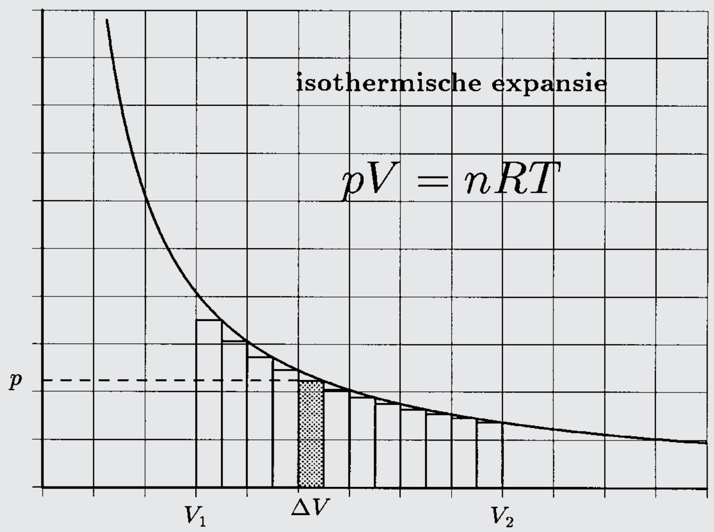
Gewenst programma?

De Commissie geeft een opsomming van een groot aantal voorwaarden waaraan een programma moet voldoen.
Desondanks heeft de Commissie de moed gehad om een schets van een nieuw programma te presenteren. Dit programma wijkt aanzienlijk af van het huidige programma en doet recht aan het belangrijkste idee om de inhoud meer te richten op inzicht en begrip. Verschillende onderdelen uit het huidige programma zoals de begrippen continuïteit en limiet, scheve asymptoten, cyclometrische functies, de integraalrekening en differentiaalvergelijkingen zijn uit het huidige programma verdwenen.
Tegen het weglaten van sommige van de genoemde onderwerpen heb ik geen bezwaar. Het huidige programma maakt al de indruk overladen te zijn. En als men dan ook nog ruimte wil vinden voor nieuwe onderwerpen en aandachtspunten, dan is men wel gedwongen om onderwerpen te schrappen.
Ik heb echter grote moeite met het schrappen van de onderwerpen continuïteit en integraalrekening. Het eerste dat ik hierbij wil opmerken is dat het weglaten van deze twee onderwerpen, maar vooral het weglaten van de integraalrekening, het acceptatieproces van het nieuwe programma in de universitaire wereld aanzienlijk zal bemoeilijken. Men gaat er bij de universiteiten van uit dat de aankomende student vertrouwd is met het differentiëren en integreren. Het zou vele jaren kunnen duren voordat het tot de universitaire wereld zou zijn doorgedrongen dat zo’n belangrijke verandering had plaatsgevonden. Mijn tweede opmerking heeft betrekking op het feit dat het integraalbegrip samen met het begrip afgeleide zulke belangrijke toepassingen heeft in de natuurkunde. Het is daarom jammer dat in het huidige natuurkunde-programma van het vwo alle toepassingen van de integraalrekening vervangen worden door

oefeningen in het zorgvuldig tellen van hokjes, alleen maar om dit onderwijs toegankelijk te maken voor leerlingen met slechts wiskunde A in hun pakket. Op deze manier worden opgelegde kansen om toepassingen van de wiskunde te laten zien niet benut.

Toch integreren

Wanneer ik het voorstel voor een nieuw programma lees, kan ik me niet aan de indruk onttrekken dat de Commissie moeite heeft moeten doen om het integraalbegrip weg te laten.



Figuur 1: VAN HOKJES TELLEN NAAR INTEGREREN
De geleverde arbeid bij *isothermische expansie* van een ideaal gas wordt op de volgende wijze berekend: bij een stapje ΔV is de geleverde arbeid $\Delta W = p\Delta V$; bij expansie van V_1 naar V_2 is de arbeid W gelijk aan de oppervlakte onder de grafiek van V_1 naar V_2. Zo vinden we dat W gelijk is aan het aantal hokjes onder de grafiek tussen V_1 en V_2 , oftewel,

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V}\,dV = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Vergelijk: J. Masschelein e.a., *Fysica, Deel 5V*, Malmberg Den Bosch, 76–77.

Op verschillende plaatsen komt het bijna om de hoek kijken.
Ik zal dit wat nader uitwerken en aangeven waar het limietbegrip en het integraalbegrip in het programma ingepast kunnen worden. Ik zal overigens niet aangeven hoe hiervoor de ruimte gevonden kan worden. In het blok discrete analyse wordt het begrip limiet van een rij ingevoerd. Ook worden rekenregels voor limieten behandeld. Het limietbegrip voor rijen wordt nog verdiept in het onderdeel functie en grafiek, met name bij de numerieke methoden. (Ik kan het niet nalaten om te wijzen op het fantastisch mooie eerste hoofdstuk van het boek ‘Fractals for the classroom’ van Peitgen e.a., waarin vanuit de studie van convergente rijen een opening wordt gemaakt naar de behandeling van chaos.) Een leerling met enige kennis van convergentie van rijen acht ik in staat om na de behandeling van rijen een eenvoudige definitie van de integraal als limiet van een rij van sommen te verteren.
Ook moet men zichzelf geweld aandoen om limieten alsmede continuïteit van functies niet te behandelen. Men kan namelijk de limiet van functies als volgt definiëren: de limiet voor *x* naar *a* van *f*(*x*) is *L* indien voor iedere rij die naar *a* convergeert en waarvan geen term gelijk is aan *a* de rij van *f*-beelden naar *L* convergeert. Voor een continue functie *g* is de limiet eenvoudig te berekenen: de limiet voor *x* naar *a* van *g*(*x*) is gelijk aan *g*(*a*). Men kan de laatste eigenschap als definitie van continuïteit nemen en hoeft dan geen beroep te doen op de epsilon-delta-definitie. Bij gebruik van deze definitie is het eenvoudig om te laten zien dat een functie *f* niet continu is in het punt *a*: er hoeft slechts een rij gevonden te worden die naar *a* convergeert, terwijl de rij van de *f*-beelden niet naar *f*(*a*) convergeert. Terzijde zij opgemerkt dat dit een volwaardige behandeling van continuïteit mogelijk maakt.
In het blok meetkunde en analyse wordt het onderwerp inhoudsberekening met toepassing van de analyse voorgesteld.
Dit lijkt mij het geëigende moment om de integraalrekening te gebruiken. Ik vraag me zelfs af hoe men hier om de integraalrekening heen kan.

Conclusie

De Commissie heeft mijns inziens uitstekend werk verricht door een nieuwe koers voor het wiskundeprogramma van het vwo aan te geven: de inhoud meer richten op inzicht en begrip. De Commissie had niet tot taak om een gedetailleerd programma op te stellen. Vanuit het wetenschappelijk onderwijs is de wens naar meer inzicht te kennen gegeven. Dit zou zonodig ten koste mogen gaan van technische vaardigheden. Ik kan me echter niet goed voorstellen dat men er genoegen mee zou kunnen nemen dat dit ten koste gaat van het fundamentele begrip van integraal.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Van de bestuurstafel

Inhoud

Wiskunde in OESO-landen

Wiskunde wordt hier niet echt belangrijk gevonden, zo blijkt uit een opinieonderzoek in Education at a glance. Van 12 OESO-landen is Nederland het enige land waar wiskunde door de bevolking niet bij de 2 belangrijkste schoolvakken wordt gerekend. Hier zijn dat Nederlands en vreemde talen. Niettemin zijn de Nederlandse wiskundemethoden niet voor niets internationaal vermaard. Ondanks de geringe lestijd zijn Nederlandse kinderen vooral goed in wiskunde.
(NRC 11-4-'95)

In dit OESO-onderzoek, waarbij de lestijd per vak voor 12-15-jarigen als percentage van de totale lestijd in 1992 in 14 landen vergeleken werd, scoorde Nederland met 8% tegen gemiddeld 12% wiskunde het laagst en met 26% tegen gemiddeld 13% vreemde talen het hoogst.
Volgens het ministerie, zo meldt het NRC-verslag, zijn onze percentages met de invoering van de basisvorming in 1993 veranderd in 13% wiskunde en 17% vreemde talen.
Van 8% naar 13% lestijd wiskunde in de eerste 3 klassen, terwijl ook nog de totale lestijd in de brugklas verhoogd is? Dan zou er ineens een duidelijk tekort aan bekwame wiskundedocenten moeten zijn... wacht eens, vreemde talen terug van 26% naar 17%…, de leraar Frans geeft nu wiskunde?
Het derde basisvormingsjaar moet nog beginnen. Voor hoeveel vbo- en mavo-leerlingen wordt de wiskunde toch na 2 jaar afgesloten? Hoe komt het ministerie aan die 13%? Als realiteit in 1995 twijfel ik zeer aan dit getal.

Leerstof en lestijd in de toekomst

Hopelijk gaan wij Nederlanders, na de bijgestelde plannen van zowel de Tweede Fase als de commissie van Veen, wiskunde minstens zo belangrijk vinden als in andere landen; in het OESO-onderzoek uit 1992 kwam geen ander land onder de 10%!
Hiervoor is nodig dat elk profiel, van ivbo t/m vwo, de juiste wiskundeleerstof bevat. Deze leerstof dient door vakbekwame leraren enthousiast gegeven te kunnen worden. Voor het vwo ligt daar nu in elk geval een probleem.
De vakontwikkelgroep wiskunde voor de tweede fase vindt vernieuwing van het wiskunde B-leerplan onverantwoord zonder leerstofexperiment! Zie de brief in dit nummer op bladzijde 285.
Als bestuur proberen we zo goed mogelijk invloed uit te oefenen, op alle niveaus van het voortgezet onderwijs.

Afspraken bij het C/D-programma

Nu het nieuwe C/D-examenprogramma eindelijk officieel is vastgesteld (nb toch met mogelijkheid van meerkeuzevragen in het cse, maar niet in het so…, zie Uitleg nr. 31b, 21-12-'94), en vanaf '96/'97 geëxamineerd moet worden, is het belangrijk dat er eenduidige afspraken over taal- en notatiegebruik komen. Een hiervoor door de Vereniging ingestelde commissie bracht in maart 1993 verslag uit. Dit is al een leidraad geweest bij het schrijven van nieuwe ▼

methoden; een uitgebreide discussie en ervaring sindsdien op de experimenteerscholen heeft geleid tot een bijgestelde versie, die op de C/D-examenbesprekingen uitgedeeld is, met de vraag om commentaar. Dit najaar publiceert de CEVO een syllabus, waarin toelichtingen gegeven worden bij het nieuwe examenprogramma wiskunde C/D. Daarin is ook een hoofdstuk gereserveerd voor taal- en notatie-afspraken. Tot 9 augustus kan commentaar nog verwerkt worden in de syllabus.
Wilt u ook van deze inspraakmogelijkheid gebruik maken? U kunt deze voorlopige afspraken ontvangen door ƒ 3,– over te maken op giro 143917 van de NVvW te Amsterdam o.v.v. 'afspraken C/D'.

Het na-Felix-tijdperk

Wie verzendt deze afspraken C/D aan u? Wie doet de administratie van de 3400 leden, de financiële administratie? Wie is deze ongelooflijk aardige, nauwgezette duizendpoot, die ook vlekkeloos alle bijeenkomsten regelt?
Felix Gaillard, met hulp van zijn vrouw Jo. Zie de lachende foto op de omslag van nr. 6. Zij zijn 65 geworden en willen hun verenigingsactiviteiten gaan afbouwen. We beseffen dat het vrijwel onmogelijk zal zijn om weer één vrijwilliger te vinden die al deze taken over kan nemen.
We proberen het werk over verschillende personen te verdelen, maar ook dan is het moeilijk om genoeg vrijwilligerstijd te vinden. Heeft u belangstelling? Bel mij even voor informatie: 03200-26518.

Agneta Aukema-Schepel

Jaarvergadering/Studiedag 1995 Eerste uitnodiging

Eerste uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 1995 van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
op zaterdag **11 november 1995**
in het Nieuwe Lyceum
Jan Steenlaan 38
3723 BV Bilthoven
030-283060.

AANVANG 10.00 uur.

AGENDA

9.30-10.00 uur
Aankomst, koffie /thee.

Huishoudelijk gedeelte

a Opening door de voorzitter Hans van Lint.
b Notulen van de jaarvergadering 1994 (zie bladzijde 277).
c Jaarverslagen (zie Euclides).
d Décharge van de penningmeester en benoeming van een nieuwe kascommissie. Het bestuur stelt kandidaat*): mw. ir. A. Tromp-Weijers en L. Sijp.
e Bestuursverkiezing i.v.m. het periodiek aftreden van: mw. A.F.S. Aukema-Schepel, J.J. Breeman en F.J. Mahieu. Allen stellen zich herkiesbaar. Het bestuur stelt hen kandidaat *).
f Vaststelling contributie '96 -'97.

Thema gedeelte (studiedag)

Thema: *Zelfstandig Studeren*

De actuele ontwikkelingen in het voortgezet onderwijs noodzaken tot een bezinning enerzijds op de onderwijsfilosofische kant van de plannen met de tweede fase v.o., anderzijds op de mogelijkheden die het wiskundeonderwijs door deze plannen krijgt.
De ontwikkelingen met betrekking tot de tweede fase v.o. leiden echter geen geïsoleerd bestaan: ze bouwen voort op de met de basisvorming ingezette weg. Interessant is ook om te zien hoe de ontwikkeling tot zelfstandigheid van de leerling al op de basisschool wordt ingezet. Tijdens het studiedaggedeelte van de jaarvergadering zal aandacht worden besteed aan
- algemene achtergronden van zelfstandig leren
- uitwerking van de plannen voor de tweede fase v.o. op school
- resultaten van het werk van de vakontwikkelgroep wiskunde.

In de diverse workshops wordt gedetailleerd ingegaan op allerlei facetten van zelfstandig leren (zowel op niveau van eerste als van tweede fase v.o.).Tevens zal de rol van nieuwe media bij zelfstandig leren worden belicht.

In volgende nummers van Euclides zal een uitvoerig overzicht van alle studiedag-onderdelen worden gepubliceerd. Reserveer nu alvast de datum in uw agenda, want u zult ook deze studiedag zeker niet willen missen.

Huishoudelijk gedeelte

g Rondvraag.

* Tot achtentwintig dagen na het verschijnen van deze oproep kunnen eveneens andere leden van de vereniging schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door ten minste vijf leden.

Notulen jaarvergadering 1994

Notulen van de algemene vergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 12 november 1994 in het gebouw van het Nieuwe Lyceum te Bilthoven.

Om 10.03 uur opent de voorzitter, dr. J. van Lint, de vergadering. Hij verwelkomt alle aanwezigen en in het bijzonder de inspecteurs drs. W. Kleijne en dr. J.G. Nijenhuis, de vertegenwoordigers van de NVOR-WO en de VVWL, de redactieleden van Euclides, de bestuursleden van de werkgroep Vrouwen & Wiskunde, de organisatoren van en medewerkers aan de studiedag, alsmede mevrouw H. Maassen.

Vervolgens spreekt de voorzitter de jaarrede uit. De jaarrede omvat onder meer een in memoriam voor onze oud-voorzitter dr. Theo Korthagen. De vergadering houdt 1 minuut stilte in verband met het overlijden van dr. Th.J. Korthagen. Ook wordt stilgestaan bij het overlijden van Frank Laforce, oud-voorzitter van de Vlaamse Vereniging van Wiskunde Leraars.

Namens de werkgroep Vrouwen en Wiskunde doet mevrouw Dédé de Haan een ‘onthullende mededeling’ over de nieuwe poster van de werkgroep (dit keer de driehoek van Pascal). De voorzitter ontvangt het eerste exemplaar van de poster.

Hierna worden de notulen van de algemene vergadering van 13 november 1993 en het jaarverslag onder dankzegging aan de secretaris, drs. J.W. Maassen, goedgekeurd.

Het verslag van de kascommissie wordt voorgelezen, waarna de penningmeester, drs. S. Garst, wordt gedechargeerd met dank voor het vele door hem en de heer F.F.J. Gaillard verrichte werk. De voorzitter dankt de aftredende kascommissie en daar er geen tegenkandidaten zijn, worden zonder stemming in de kascommissie mevrouw ir. A. Tromp-Weijers uit Oss en drs. G. Stroomer uit Zevenaar benoemd.

De contributie voor het verenigingsjaar 1995/1996 wordt vastgesteld op *f* 65,– per jaar.

De voorzitter gaat hierna over tot de bestuursverkiezing. Aftredend zijn mevrouw drs. M. Kollenveld en de heren drs. S. Garst, dr. J. van Lint en drs. J.W. Maassen. Daar de drie eerstgenoemden zich herkiesbaar hebben gesteld en er geen tegenkandidaten zijn, worden zij herkozen. De heer drs. J.W. Maassen heeft zich niet herkiesbaar gesteld. In zijn plaats zal de heer R.J. Bloem het secretariaat van de vereniging voor zijn rekening nemen en wordt de heer W. Kuipers tot nieuw bestuurslid gekozen.

Het nieuwe bestuurslid, Wim Kuipers, wordt welkom geheten.

Inmiddels is de oud-secretaris, Jan Maassen, onder valse voorwendselen uit de zaal gelokt. Bijna tegelijkertijd sluit de heer mr. A. Tchernoff, burgemeester van de gemeente De Bilt, zich aan bij onze vergadering. De voorzitter stelt de vergadering voor Jan Maassen vanwege zijn vele verdiensten voor het wiskunde-onderwijs in het algemeen en de NVvW in het bijzonder tot ere-lid van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren te benoemen. De vergadering stemt unaniem en met applaus met dit voorstel in.

Nadat Jan Maassen in de zaal is teruggekeerd, feliciteert de voorzitter hem met het feit dat hij bij acclamatie is benoemd tot ere-lid van onze vereniging.

Jan Maassen dankt het bestuur en de vergadering voor de verleende eer van het erelidmaatschap.

Dan geeft de voorzitter het woord aan de heer Tchernoff. Deze richt zich tot de zaal, het bestuur en met name Jan Maassen en memoreert de vele verdiensten, die Jan Maassen voor de samenleving, het onderwijs en de wiskunde heeft gehad en nog steeds heeft. Voorts looft hij Jan Maassen vanwege alles wat hij voor wiskundeleraren en voor de vereniging heeft gedaan, zoals zijn bijdrage aan het schrijven van opgavenbundels, het talrijke commissiewerk en veel organisatorische zaken. In verband daarmee is de heer Tchernoff verheugd de heer drs. J.W. Maassen de versierselen te mogen opspelden behorende bij zijn onderscheiding als Ridder in de orde van Oranje Nassau.

Mevrouw Henny Maassen krijgt uit handen van de burgemeester een boeket bloemen aangeboden.

Jan Maassen krijgt het woord en zegt vereerd te zijn met deze koninklijke onderscheiding. Hij dankt burgemeester Tchernoff voor zijn woorden en voor het feit dat hij deze ridderorde heeft willen uitreiken. Ook dankt hij al diegenen, die ervoor hebben gezorgd dat hem deze ridderorde is verleend.

Daarna gaat de voorzitter over tot de orde van de dag. Hij kondigt aan dat tijdens de lunch-pauze een videofilm over ‘de’ Schotlandreis zal worden vertoond. Hij verzoekt vragen voor de rondvraag, zo mogelijk, al voor of tijdens de lunch schriftelijk bij het bestuur in te leveren.

Vervolgens krijgt de heer dr. Anne van Streun het woord om de studiedag in te leiden.

Na de studiedag wordt om 15.35 uur de algemene vergadering voortgezet met de rondvraag.

De eerste vraag is er een van de heer Keultjes: ‘Kan er een commissie in het leven worden geroepen ter bewaking van de examens wiskunde ▼

(havo/vwo) i.h.b. van wiskunde A en ter controle van het functioneren van de CEVO?'
De voorzitter antwoordt dat een dergelijke commissie onmogelijk ingesteld kan worden, aangezien de CEVO onder de directe verantwoordelijkheid van de minister valt en alleen door de minister gecontroleerd kan worden. Individuele klachten dienen derhalve aan de minister te worden gericht. Daarnaast voorziet de NVvW door middel van de regionale examenbesprekingen al in de mogelijkheid klachten te verzamelen en door te geven en met de uitkomsten van de tijdens die bijeenkomsten afgenomen enquêtes invloed uit te oefenen op de cesuur bij het betreffende examen.
Memorerend aan zijn vraag in de vorige algemene vergadering en zijn briefwisseling met de CEVO, benadrukt de heer Keultjes zijn bezorgdheid met betrekking tot de kwaliteit van examens en correctievoorschriften. De voorzitter neemt daarvan nota.
De volgende vraag is van de heer Kuijk. Voorafgaand aan zijn vraag wijst de heer Kuijk erop dat onder de leden van de NVvW zich vogels van divers pluimage bevinden, onder andere 2e graders, 1e graders met K-V, MO-B of 1e graad nieuwe stijl van Hogescholen, ingenieurs, doctorandi, doctors, werkend in het VO, het MBO, het HBO (met name de lerarenopleidingen) en het WO. Tevens stelt hij dat de 'Studiecommissie Wiskunde B vwo' mede op aandringen van de NVvW is ingesteld en dat enkele leden in de commissie participeerden namens de NVvW. Refererend aan diverse publicaties (rapport Verkenningscommissie 'Wiskunde in beweging', artikel prof. J. v.d. Craats in de Nieuwe Wiskrant, rapport Studiecommissie Wiskunde B vwo, uitlatingen in de pers van diverse hoogleraren) vraagt de heer Kuijk of het bestuur een standpunt heeft met betrekking tot de stelling die de laatste jaren steeds weer opduikt: '*de oorzaak van het feit dat steeds minder vwo-abituriënten een universitaire studie wiskunde kiezen, en van het feit dat het huidige wiskunde B-examenprogramma niet goed functioneert, is vooral gelegen in de omstandigheid dat er steeds minder universitair gevormde leraren in het vwo werken en dat de niet-universitair opgeleide leraren te weinig wiskundig gevormd zijn om een juist beeld van dit vak met voldoende kennis en enthousiasme over te dragen*'.
Tevens vraagt de heer Kuijk of het bestuur met hem van mening is dat de noodzaak van aanbeveling 10 in het rapport van de Studiecommissie Wiskunde B vwo niet berust op door de Commissie in het rapport aangedragen feiten.
De voorzitter antwoordt dat het bestuur van de NVvW met betrekking tot de door de heer Kuijk aangedragen punten nog geen standpunt heeft kunnen innemen (met name omdat de inkt van het rapport van de Studiecommissie Wiskunde-B vwo nauwelijks droog is); tevens zegt de voorzitter toe de 2 mondeling gestelde vragen, samen met de door de heer Kuijk schriftelijk ingediende vragen, in het bestuur aan de orde te stellen. Tevens zegt de voorzitter de heer Kuijk antwoorden op zijn vragen toe.
De heer Derks heeft zich bijzonder geërgerd aan de hoge deelname-kosten van de Nationale Wiskundedagen. Hij vraagt of deze dagen alleen voor elite-leraren en -scholen zijn georganiseerd. De voorzitter antwoordt dat het bestuur in eerste instantie ook geschrokken is van het prijskaartje. De NVvW wil zoveel mogelijk activiteiten (jaarlijkse studiedag, regionale bijeenkomsten, examenbesprekingen en wat dies meer zij) gratis of zo goedkoop mogelijk organiseren. Het nascholingsbeleid van de overheid staat echter haaks op de behoefte aan goedkope nascholing … de nascholingsgelden worden tegenwoordig doorgesluisd naar de scholen en dus moeten instituten, die nascholing verzorgen, tegenwoordig kosten voor het verzorgen van nascholing terugverdienen via de deelnemers.
De heer Kappen is (na het bijwonen van één van de werkgroepen) geschrokken van de gevolgen van het eventueel invoeren van profielen in de bovenbouw vwo-havo, met name voor wiskunde B in het havo. De voorzitter deelt mee dat het bestuur van de NVvW deze bezorgdheid deelt en in een briefwisseling met de Stuurgroep 2e fase VO is verwikkeld. Tot op heden heeft het bestuur geen geruststellend antwoord gekregen op gestelde vragen en kanttekeningen, naar aanleiding van het tweede rapport van de stuurgroep.
De heer Kappen vraagt vervolgens of het bestuur een landelijke actie (petitie ?!) kan organiseren, opdat onze ongerustheid zichtbaar gemaakt kan worden. De voorzitter deelt mee weinig te zien in acties, zoals het aanbieden van petities, maar zegt toe in dit verband druk te blijven uitoefenen op zowel de stuurgroep als het ministerie.
De heer Goverde vraagt of Euclides niet meer en beter gebruikt kan worden om de leden voor te lichten over zaken, zoals de ontwikkelingen met betrekking tot de 2e fase VO. Hij vraagt bijvoorbeeld om samenvattingen van relevante passages uit rapporten, zoals dat van de Stuurgroep 2e fase VO. De voorzitter licht toe dat het bestuur ook pas sinds kort over genoemd rapport beschikt en dus de gevolgen nog onvoldoende heeft kunnen doorspreken. Bovendien betwijfelt de voorzitter of Euclides gebruikt zou moeten worden voor het verspreiden van dergelijke samenvattingen.
De heer Bos vraagt het bestuur de vinger aan de pols te houden bij de bemensing van de vakontwikkelgroep(en), aangezien bij monde van mevrouw Ginjaar al gesteld is dat alleen wie de uitgangspunten van de Stuurgroep onderschrijft, benoembaar is in zo'n vakontwikkelgroep.

▼ De voorzitter geeft aan dat het bestuur van de NVvW nauwelijks gelegenheid heeft (gehad) om bij te sturen en pas 1 maand geleden gevraagd is namen te noemen van kandidaten voor de vakontwikkelgroepen.
De heer Bos vraagt het bestuur fel te protesteren, als NVvW-adviezen met betrekking tot de bemensing van de vakontwikkelgroepen worden genegeerd. De voorzitter zegt dit toe.

Voordat hij de vergadering sluit wenst de voorzitter een aantal leden in het zonlicht te zetten. Om te beginnen zijn dat drs. Marja Bos en dr. Anne van Streun, die gezamenlijk hebben zorggedragen voor de inhoudelijke voorbereiding en uitvoering van de geslaagde studiedag. Vervolgens worden ook alle werkgroepleiders in woord en gebaar bedankt.
Dit jaar bedankt de voorzitter Felix en Jo Gaillard eens extra voor alle inzet voor de vereniging bij alle activiteiten, die de vereniging door het jaar heen organiseert, en met name bij de voorbereiding en uitvoering van de jaarvergadering en studiedag van de NVvW.
Tenslotte dankt de voorzitter de directie en de huishoudelijke dienst van het Nieuwe Lyceum voor de genoten gastvrijheid.
Daarna sluit de voorzitter de vergadering en nodigt hij de leden uit voor de receptie ter gelegenheid van het feestelijk bestuursafscheid van Jan Maassen.

Rob Bloem, secretaris.

Impressie van een studiedag van Vrouwen en Exacte Vakken

CENTRUM **VROUWEN EN EXACTE VAKKEN**

Zaterdag 1 april. Voor het eerst kom ik op een studiedag georganiseerd door VeEX. Ik heb er namelijk wat moeite mee: alleen vrouwen.
Het aantal deelnemers verbaast me: slechts 25 waaronder twee mannen. In vergelijking met andere studiedagen die ik bezoek, is dit wel heel intiem. Marjolijn Witte begint de dag met een inleiding over haar onderzoek ‘Meisjes en VWO wiskunde-B’.
Uit de cijfers blijkt dat meisjes in het vak wiskunde-A minder goed zijn dan jongens. Ook valt op dat de kleine groep meisjes die wiskunde-B kiest, niet beter presteert dan voorheen.
Er ontstaat discussie over de invloed van de docent op prestaties, houding ten aanzien van wiskunde en keuze van wiskunde. Belangrijker dan de sekse van de persoon voor de klas is of hij/zij zich bewust is van de problematiek.
Na de inleiding kies ik voor de workshop: ‘Bèta-profielen tweede fase V.O.’ Vrouwen van de diverse vakontwikkelgroepen zijn aanwezig en geven de stand van zaken van dit moment weer. Veel wijzer ben ik er niet van geworden. Wel is duidelijk dat er onder enorme tijdsdruk gewerkt wordt, dat overleg tussen de verschillende vakontwikkelgroepen nuttig kan zijn en dat adviezen ten aanzien van het vak techniek nog verder uitgewerkt moeten worden. (Techniek komt als onderdeel in de diverse vakken aan bod.) Kortom, in veel te korte tijd moet er nog waanzinnig veel gebeuren.
We worden zonder pardon onderbroken door de komst van de soep: de lunch kan beginnen.
Daarna nog een workshop door Carla van Oorschot over het BeL-project: beroepsbeoefenaren voor de klas in het kader van beroepenoriëntatie in de BAVO. Carla praat enthousiast over hoe het allemaal ontstaan is.
De opzet van een BeL-les is als volgt: Allereerst is er een aandachtsrichter (de automonteur komt met een versnellingsbak binnen, de tandarts deelt kauwtabletjes rond die tandplak aantonen), aansluitend vertelt de beroepsbeoefenaar een persoonlijk verhaal, daarna volgt een leerlingenactiviteit die te maken heeft met de praktijk van het betreffende beroep.
Het BeL-project werkt met vrouwelijke beroepsbeoefenaren in veelal niet-traditionele vrouwenberoepen. Er is een lessencyclus met docentenhandleiding beschikbaar. Eventueel kan ook begeleiding gevraagd worden bij het ontwikkelen van eigen materiaal en het opzetten van een eigen netwerk.
Het ziet er heel aantrekkelijk uit, ik zou er wel zin in hebben op mijn school.
Al met al heb ik geen spijt van mijn dagje VeEX, maar of ik volgende keer weer kom?

Josephine Buskes

I&I-conferentie 1995:

IT aan de lijn

I&I doet niet aan de lijn, maar is 'on line' met geïnteresseerden in informatietechnologie. De vereniging houdt haar zesde conferentie over informatietechnologie in avo, vbo en mbo op vrijdag en zaterdag 29/30 september 1995. Leidraad voor dit jaar: 'IT aan de lijn'. Want telematica wint snel veld en docenten moeten weten wat zij daarmee op school kunnen doen.

Informatietechnologie op meer dan één lijn

I&I heeft een grote verscheidenheid aan werkgroepen, kleine, hecht wordende netwerken. Enkele werkgroepen zijn: IT&Taal, systeembeheer, vbo-mbo-vavo, telematica, voorbereiding conferentie, redactie. Meepraten of meedoen kan op de conferentie.

I&I belijnt informatietechnologie in onderwijs

'IT aan de lijn' biedt deelnemers veel nieuwe informatie. Inleiders belichten plenair de toekomst vanuit hun visie, IT-ervaringen, deskundigheid en plek in de IT-wereld van vandaag. In kleinere bijeenkomsten is er nieuws over: de toetsing van informatiekunde in de basisvorming, de vakontwikkelgroep informatica (2e fase), het vak techniek vbo/mavo èn over toepassingen van telematica in onderwijs. Op de markt staan ontwikkelaars en uitgeverijen met hun produkten. In de centrale ruimte lokken elektronische kasten de deelnemers uit tot experimenteren en spelen. Netwerken/werkgroepen presenteren zich. En de deelnemers komen zelf aan slag: collegae informeren over hun vondsten voor informatietechnologie in onderwijs.

Maximaal 175 personen kunnen overnachten. De dagaccomodatie is veel ruimer.

Gehele conferentie *zonder overnachting*	**ƒ 150,–**
Gehele conferentie *incl. overnachting*	**ƒ 190,–**
Toeslag éénpersoonskamer	**ƒ 40,–**
Eén conferentiedag	**ƒ 85,–**
I&I-leden ontvangen ƒ 25,– korting	

Inlichtingen en inschrijfformulieren kunt u vragen bij:
Conferentiebureau C.P.S.
Conferentie I&I
Postbus 30
3870 CA HOEVELAKEN
Telefoon: 03495-41249

Mededelingen

Centrum voor Wiskunde en Informatica

Vakantiecursus 1995

Eindhoven: 17 en 18 augustus

Amsterdam: 1 en 2 september

Kegelsneden en Kwadratische vormen

PROGRAMMA

Eerste dag

J.P. Hogendijk
De 'Kegelsneden' van Apollonius van Perga
A.W. Grootendorst
De 'Kegelsneden' bij Johan de Witt
J.M. Aarts
Kwadrieken, van dimensie twee en hoger
A.G. van Asch
Kwadratische vormen en metriek

Tweede dag

P. Stevenhagen
Roosters en Kwadratische vormen
C.W.A.M. van Overveld
'Gedeelde Vreugde is dubbele Vreugde', of Krommen, voortgebracht door recursieve procedures

Computerdemonstraties

F. van der Blij
Sommen van Kwadraten

Deelnamekosten ƒ 75,– exclusief maaltijden.
Inlichtingen:
Mw. M. Bruné, Centrum voor Wiskunde en Informatica,
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam
tel. 020-5924058.

Boekbespreking

F.S.J. Riemersma
Leren oplossen van wiskundige problemen in het voortgezet onderwijs
1991, Universiteit van Amsterdam, academisch proefschrift

Totaal-indruk
In het onderzoek waarvan dit boek de neerslag is heeft de auteur geprobeerd een onderwijsleerprogramma voor wiskunde te ontwerpen. Het leerdoel 'leren oplossen van wiskundige problemen' nam daarin een centrale plaats in. In zeker opzicht heb ik het met belangstelling gelezen. Niet waar hij fragmenten van zijn programma geeft, of waar hij rapporteert over opzet, analyse en uitvoering, en de resultaten. Mijn voornaamste bezwaren zijn de droge opsommingen en de veel te uitvoerige statistische beschrijvingen, die zeker voor een deel als bijlagen gepresenteerd hadden kunnen worden. Wel de eerste twee hoofdstukken waarin hij het probleem schetst en ingaat op de eisen waaraan hij zijn programma wil laten voldoen. En ook het laatste hoofdstuk met een bespreking van de resultaten en de conclusies.

Centrale vraag
In het eerste hoofdstuk legt hij de lezer het centrale vraagstuk van het wiskundeonderwijs voor: hoe komt het toch dat leerlingen betrekkelijk eenvoudige opgaven niet kunnen maken terwijl ze zeker over de benodigde kennis beschikken?

Antwoord
Zijn antwoord is dat die situatie wellicht kan verbeteren als in het onderwijs veel explicieter rekening wordt gehouden met de doelstelling van het leren oplossen van problemen. Na verkenning van de literatuur inventariseert hij veel belangrijke en relevante aspecten van dergelijk wiskundeonderwijs. Eén van de conclusies is dat er te weinig aandacht is voor regels die leerlingen kunnen helpen bij het aanpakken van problemen. Een andere conclusie is dat uit onderzoek blijkt dat systematische aandacht voor het oplossingsproces en het aanbieden van zogeheten heuristische regels beter werken dan het aanbieden van concrete materialen of een methode van geleide ontdekking. Bij het ontwerpen van zijn programma staan vier aanwijzingen centraal hoe leerlingen opgaven zouden moeten/kunnen aanpakken:
- lezen gericht op snappen waar het om gaat, wat gegeven en gevraagd is
- begrijpen (heb je zoiets al eens eerder gemaakt? bedenk iets waardoor je aan de slag kunt)
- uitwerking met onder andere het opschrijven van de tussenstappen en berekeningen
- controle/evaluatie waarin je nagaat of de uitwerking juist is en je kritisch naar je resultaat kijkt.

Resultaten
De resultaten van het onderzoek zijn als volgt. Onmiddellijk na de experimenten met zijn programma deden de leerlingen die zijn programma hadden gevolgd, het beter op de toets dan de vergelijkbare leerlingen die het programma niet hadden gevolgd, maar na drie maanden was dat verschil verdwenen.
Aan het eind van het boek gaat hij in op de betekenis van de resultaten voor theorie en praktijk. Bij beginnende probleemoplossers zijn de momenten waarop een impasse in het oplossingsproces optreedt cruciaal. Als de leerling een dergelijke impasse weet te 'repareren' en zich realiseert waardoor dat komt dan kan een stap naar meer gevorderd probleem-oplossen gezet worden. De heuristische regels kunnen bij een impasse een belangrijke rol spelen. Door in het programma de leerling van feedback te voorzien wordt niet zozeer vinden van het antwoord in het oplossingsproces bevorderd. Belangrijker is dat de leerling daardoor over een soort mechanisme gaat beschikken waarmee hij zijn eigen oplossingsproces gaat controleren en beheersen. Hij werd aangespoord te leren van zijn eigen ervaringen: probeer ontbrekende informatie te verwerven (op te zoeken, te vragen) en verbeter een aanpakstrategie bij een succesvol verlopen oplossingsproces.

Commentaar
De vraag is natuurlijk wat we na dit onderzoek meer weten over het wiskundeonderwijs. Naar mijn idee: geen nieuwe dingen, want het belang van heuristisch onderwijs en hoe dat opgezet kan worden is al eerder door Anne van Streun in zijn proefschrift (1989) en diverse andere publicaties duidelijk naar voren gebracht. Ook het gebruiken van impasses om leerlingen te leren betere probleemoplossers te worden is een al ouder idee, onder andere van J.J. Elshout en van W. Jansweijer, beschreven in diens proefschrift: PDP: een benadering vanuit de kunstmatige intelligentie van probleem-oplossen en leren door doen in een semantisch rijk domein (1988).

Bert Zwaneveld

Richtlijnen voor auteurs

Aanleveren
Kopij dient bij voorkeur te worden aangeleverd op een diskette (3,5 of 5,25 inch) in WP5.1 (MS-DOS) of ASCII-bestand. Gedrukte of geschreven kopij kan vertraging opleveren. De tekst mag geen lay-out bevatten. De tekst moet zo kaal mogelijk worden aangeleverd, zonder woordafbrekingen e.d.; geef alinea's wel met harde returns aan.
Lever bij de diskette altijd een drietal afdrukken van de tekst aan, waarop bijvoorbeeld staat aangegeven waar u de illustraties had gedacht.

Tekst
Maak een korte, bondige titel; vermeld de naam van de auteur zonder eventuele titels. Paragrafen worden aangeduid met korte tussenkoppen (maximaal 23 aanslagen); per kopje vervallen er 4 regels basistekst.
De basistekst komt in een 3-koloms stramien. Een volle pagina telt 3 × 54 = 162 regels van 35 aanslagen per regel.
Wiskundige artikelen komen in een 2-koloms stramien. Een volle pagina telt hier 2 × 54 = 108 regels van 58 aanslagen per regel.

Illustraties
Voorzie uw tekst van toepasselijke illustraties.
Tekeningen, grafieken: scherpe figuren met zwarte pen of inkt gemaakt, of geprint op een goede printer.
Tabellen: scherp origineel op apart vel aanleveren.
Foto's: liefst zwart/wit met scherp contrast.
Voorzie illustraties van een verklarend bijschrift (op apart vel; bij meer illustraties zowel de illustraties als de bijschriften nummeren). Indien een illustratie op een bepaalde plaats in de tekst moet worden opgenomen dient dit duidelijk te worden aangegeven.

Verschijningsdata van Euclides
Omstreeks de 1e van de maanden september, december en mei; omstreeks de 15e van de maanden oktober, januari, februari, maart en juni.
Kopij voor het volgend nummer moet uiterlijk 10 weken voor verschijning geaccepteerd zijn door de redactie; voor de acht middenpagina's (in artikelen voor deze bladzijden mogen geen illustraties, tabellen of formules voorkomen!) geldt een termijn van 7 weken.

Kalender

21 juni 1995
Utrecht

Bestuursvergadering NVvW

11 november 1995
Bilthoven

Jaarvergadering/studiedag NVvW

Adressen van auteurs

J.M. Aarts
TUD, Faculteit TWI
Mekelweg 4
2628 CD Delft

J. Alkemade
KSEPL
Postbus 60
2280 AB Rijswijk

A.F.S. Aukema-Schepel
Buitenplaats 77
8281 AC Lelystad

H.P. Barendregt
KUN, Fac. Wisk. en Inf.
Toernooiveld 1
6525 ED Nijmegen

J. Buskes
Kapelstraat 4
5824 AJ Holthees

G. Helmers
Heemweg 2
9993 TN Westerwijtwerd

K. Hoogland
Gen. Cronjéstr. 79 rood
2021 JC Haarlem

M.C. van Hoorn
Noordersingel 12
9901 BP Appingedam

T. Jansen en H. Peters
RUL, Fac. Econ. Wetensch.
Vakgr. Kwantitatieve Economie
Postbus 616
6200 MD Maastricht

J. de Lange
Freudenthal instituut
Tiberdreef 4
3561 GG Utrecht

A.H.G. Rinnooy Kan
VNO
Postbus 093
2509 AB Den Haag

A. van Rooy
KUN, Fac. Wisk. en Inf.
Toernooiveld 1
6525 ED Nijmegen

S. Spannenburg en H. Oltmans
Joh. Enschedé
Postbus 464
2000 AL Haarlem

R. Verstappen
RUG
Postbus 800
9700AV Groningen

R. Wanga
Zeearend 46
3435 GX Nieuwegein

G. Zwaneveld
Bieslanderweg 18
6213 AJ Maastricht

OPROEP

Zoals bekend heeft de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren een Derde-Wereldfonds in het leven geroepen. Dit is gebeurd naar aanleiding van een breed ondersteunde motie, ingediend op de jaarvergadering van 1993.
Met het Derde-Wereldfonds wordt het wiskundeonderwijs in de Derde Wereld ondersteund. In het vorige nummer van Euclides heeft u kunnen lezen welk project als eerste is uitgekozen voor een subsidie van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Beter gezegd: een subsidie van… ONS ALLEMAAL!
Ja, want dat maakt ondersteuning pas echt zinvol. De brede steun op de jaarvergadering van 1993 moet worden omgezet in brede steun van alle leden van de Vereniging!
Daarom hier de oproep aan alle leden om ƒ 5,– extra te betalen, bovenop de normale contributie. Op de acceptgirokaart is hiervoor al plaats ingeruimd, net als vorig jaar. Vorig jaar heeft een ruime meerderheid op deze manier het Derde-Wereldfonds gesteund. Wij hopen dat dat ook dit jaar gebeurt!
In Euclides zullen in de nieuwe jaargang drie artikelen verschijnen over het wiskundeonderwijs in de Derde Wereld. Hiermee wordt beoogd het draagvlak voor de steun aan het wiskundeonderwijs in de Derde Wereld verder te vergroten.

De redactie

Derde-Wereldfonds

De Vakontwikkelgroep Wiskunde is, tussen 1 december 1994 en 1 augustus 1995, bezig met het ontwikkelen van 8 leerplannen. In Euclides 70-6 is er in twee artikelen over bericht.

Openheid-beslotenheid

M. van Hoorn

Op donderdag 20 april j.l. hadden twee leden van de Vakontwikkelgroep zitting genomen in een panel, tijdens de lerarenmiddag van het Mathematisch Congres. Wat blijkt: zij vertelden dat de leden van de Vakontwikkelgroep het stilzwijgen moesten bewaren over de bereikte vorderingen. En zo kwam het dat zij ook inderdaad bijna niets te zeggen hadden.
Het enige dat de aanwezigen kan zijn opgevallen is, dat professor De Smit, één van de twee aanwezige leden van de Vakontwikkelgroep, wel erg nadrukkelijk het belang van de statistiek noemde. Zo kan het straks gebeuren dat de (min of meer) toevallige deelname van een statisticus, als enige vertegenwoordiger van de universiteiten in de Vakontwikkelgroep, tot gevolg heeft dat statistiek in B-programma's wordt opgenomen. Dit is uiteraard nog niet meer dan een vermoeden. Over wat er werkelijk in de programma's komt heerst onduidelijkheid, en daarover beslist ook de Vakontwikkelgroep uiteindelijk niet.
Een bredere discussie over - bijvoorbeeld - de statistiek in programma's voor de bovenbouw zou zeer op zijn plaats zijn. Naar verluidt is een datum geprikt voor een discussie met 'het veld'. Het veld heeft daar geen mededeling over gekregen. Onze vereniging gelukkig wel. Maar naar tevens verluidt is de geplande datum intussen verschoven naar de maand september. De Vakontwikkelgroep schijnt te denken dat zij dan nog bestaat.
Dat laatste mag trouwens worden gehoopt. Zoals uit de brief van het bestuur aan de staatssecretaris blijkt, wil de staatssecretaris niet sleutelen aan de (huidige) leerstof. Zij spant het paard achter een wagen die toch al in de modder blijft steken. Invoering van profielen in de bovenbouw in 1998 is in feite al van de baan. We mogen blij zijn als het lukt de profielen in 1999 in te voeren.
Dit stukje heet: *Openheid - beslotenheid*. Daar is een reden voor. Programma's die in de beslotenheid van studeerkamers of vergaderruimtes tot stand komen werken niet. Er is gelegenheid nodig voor bredere discussie, en vooral ook tijd voor het uittesten van nieuwe onderdelen. Openheid is, met andere woorden, een noodzakelijke voorwaarde om een goed programma te krijgen.

Brief aan de Staatssecretaris

Aan:
Mevr. drs. T. Netelenbos
Staatssecretaris van het ministerie van OC&W
Postbus 25000
2700 LZ ZOETERMEER

Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

Leusden, 7 april 1995.

Excellentie,

Er bereiken ons geruchten dat u het voornemen heeft afwijzend te reageren op de aanvraag voor het instellen van de Projectgroep Wiskunde (2e fase).

Dit verontrust het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) zeer.

Het huidige leerplan voor wiskunde-B (vwo) is erg verouderd. In hoofdlijnen is er weinig veranderd sinds 1968. Bij de herverkaveling van 1985 is het belangrijkste leerstofgebied ('analyse') namelijk buiten schot gebleven. Reeds in 1991 hebben wij op uw Ministerie de dringende noodzaak aangekaart om het examenprogramma wiskunde-B (vwo) te herzien.
Uw beslissing tot het instellen van de Studiecommissie wiskunde-B (vwo) in 1993 hebben wij dan ook toegejuicht. Het rapport van de Studiecommissie (oktober 1994) is naar onze mening een waardevolle bijdrage aan de gedachtenvorming over inhouden van nieuwe leerplannen.
De conclusie dat Nederland met het huidige programma de volgende eeuw niet in kan gaan, wordt onderschreven door allen die in Nederland op een of andere manier betrokken zijn bij de wiskunde en/of het wiskunde-onderwijs.

Op dit moment is de Vakontwikkelgroep Tweede Fase druk doende met het opstellen van haar voorstellen. Als deze voorstellen slechts het herverkavelen van 'oude' leerstof zouden inhouden, is dat *een ramp voor Nederland*. De 'oude' leerstof gaat namelijk geheel voorbij aan:

a. de wensen die binnen de wetenschappelijke wereld leven,
b. de winst die geboekt is bij de ontwikkeling van de programma's voor de basisvorming,
c. de eisen die gesteld moeten worden om wiskunde even aantrekkelijk te maken voor meisjes als voor jongens,
d. de technologische ontwikkelingen die in de afgelopen jaren hebben plaatsgevonden en die ook in de volgende eeuw in belangrijke mate het ontwikkelen en het toepassen van wiskunde zullen beïnvloeden.

Bij het samenstellen van de Vakontwikkelgroep hield u gelukkig rekening met de in de punten a. t/m d. genoemde zaken. Met u hopen wij op voorstellen voor de B-profielen die nieuwe passende leerstofgebieden ontsluiten.

Het is van het grootste belang dat het landelijk onderwijzen van zulke nieuwe leerstofgebieden wordt voorafgegaan door:

1. ontwikkeling van nieuw leerlingenmateriaal,
2. experimenten met dit leerlingenmateriaal,
3. bijstellen van dit leerlingenmateriaal,
4. detailbeschrijving van de nieuwe leerstofgebieden op grond van de ervaringen met dit leerlingenmateriaal,
   en
5. nascholing van docenten aan de hand van dit leerlingenmateriaal (*),
6. overleg met uitgevers voorafgaand aan het redigeren van schoolboeken in verband met de onmogelijkheid van een centraal examen bij sterk uiteenlopende interpretaties van de programma's; ook bij dit overleg zullen de ervaringen met het leerlingenmateriaal niet gemist kunnen worden.

Samenvattend:
Vernieuwing van het programma zonder het instellen van de Projectgroep voor de ontwikkeling van het nieuwe leerlingenmateriaal is onverantwoord.

Wij hopen dat u het bovenstaande in uw eindbeslissing mee wilt laten wegen. Vanzelfsprekend zijn wij gaarne bereid het een en ander mondeling toe te lichten.

Namens het bestuur van de NVvW,

R.J. Bloem
(secretaris)

(*) Zonder de kwaliteit en de inzet van onze leden tekort te willen doen, staan wij op het standpunt dat nascholing zonder een ankerpunt van geëvalueerd leerlingenmateriaal een vorm van kapitaalvernietiging is.

Beveiliging tegen kopiëren vanuit de wiskunde. Screen Angle Modulation (SAM) en Sample-Band Image Coding (SABIC)

Sijbrand Spannenburg
Hans Oltmans

Inleiding

De grafische industrie wordt sinds enige jaren geconfronteerd met de invasie van de digitale systemen, waarbij met name de digitale colour-copier een bedreiging vormt voor waardedocumenten. Het beveiligen van waardedocumenten tegen namaak d.m.v. deze colour-copiers lijkt steeds moeilijker te worden naarmate de techniek voortschrijdt en de kwaliteit van deze systemen steeds beter wordt. Technieken, die erop gebaseerd zijn onvolkomenheden van de copiers m.b.t. bij voorbeeld het reproduceren van bepaalde kleuren uit te buiten worden zo langzamerhand onbruikbaar of kunnen betrekkelijk eenvoudig worden omzeild. Beter is het de basisprincipes van deze digitale systemen te analyseren en te vergelijken met de basisprincipes van menselijke waarneming. Welke structuren, die gedrukt kunnen worden, kunnen door de mens (niet) worden waargenomen en welke kunnen door de copier (niet) gereproduceerd worden? In hoeverre overtreft de scanner, die in de copier is ingebouwd, de menselijke waarneming en hoe kan hiervan gebruik worden gemaakt? De belangrijkste vraag hierbij en waar we nader op in zullen gaan is, of dit alles in een wiskundig model is te gieten, zodat ook voor de toekomst redelijke voorspellingen kunnen worden gedaan betreffende de werking van bepaalde structuren.

De wiskundige basis voor SAM en SABIC

Bij nadere bestudering van het probleem wordt duidelijk dat we in feite met signaalverwerking in twee dimensies te maken hebben. Dit geldt zowel voor de menselijke waarneming als voor de digitale scanner. We kunnen dus gebruik maken van de wiskundige technieken uit de signaal-analyse, waarbij de Fourier-transformatie een zeer belangrijke rol speelt. De belangrijkste operaties in de signaal-analyse spelen zich eigenlijk af in het ‘frequentie-domein’. Een grafisch beeld kan gezien worden als een verzameling van grijswaarden (voor kleurenbeelden Rood, Groen en Blauw (RGB)-waarden) op een discreet rooster, ofwel een functie van twee discrete variabelen.
Net zoals in de elektrotechniek gebruikelijk is voor tijdsignalen, kan deze functie ontbonden worden naar frequentiecomponenten met behulp van de Fourier-transformatie. In één dimensie geeft de waarde van de Fourier-getransformeerde voor een bepaalde frequentie aan ‘hoeveel’ harmonische componenten (sinussen en cosinussen) met die frequentie er in het signaal aanwezig zijn. Het signaal zelf kan men opgebouwd denken uit de som van al deze harmonischen,

vermenigvuldigd met de bijbehorende Fourier-coëfficiënt. Bij 2-dimensionale signalen (beelden) heeft de frequentie behalve een grootte ook een richting. Zo heeft, bijvoorbeeld, een beeld dat bestaat uit een patroon van evenwijdige lijnen in een bepaalde richting alleen frequentiecomponenten loodrecht op deze richting.
Samenvattend komt het er op neer dat niet wordt gekeken hoe het beeld er werkelijk uit ziet (het spatiële domein), maar hoe het beeld is opgebouwd uit verschillende frequenties (het frequentie-domein). Met behulp van deze techniek kan een zogenaamde Modulatie-Transfer-Functie (MTF) voor het menselijk oog worden afgeleid die bepaalt hoe en welke frequenties worden waargenomen. Het blijkt dat geen frequenties kunnen worden waargenomen boven ongeveer 50 perioden/graad, hetgeen bij een normale beoordelingsafstand van 30 cm overeenkomt met ongeveer 10 perioden/mm ofwel 250 perioden/inch. Deze frequentie-band zal hierna als visuele band worden omschreven. Belangrijk is te constateren dat alle frequenties die buiten deze visuele band liggen door de mens worden waargenomen als een egale tint zonder informatie. Het is voor grafische beelden dus in het algemeen voldoende dat de beeld-informatie zich tot deze visuele band van 250 perioden/inch beperkt.
Vergelijken we dit met de huidige digitale copiers dan zien we dat deze een origineel 'bemonsteren' (sample) met een frequentie van minstens 400 perioden/inch en dit zal in de toekomst nog zeker toenemen. Deze frequentie-band is dus breder dan de visuele band en het gedeelte hiervan dat buiten de visuele band valt zal hierna als Sample-Band worden omschreven. Deze Sample-Band kan als een zijband worden opgevat, die als 'draaggolf' kan dienen voor informatie die buiten het beoordelingsgebied van het menselijk visueel systeem ligt.
Voor wat betreft de theorie van het scannen en digitaal verwerken van beelden stuiten we al direct op een fundamentele stelling uit de signaal- en beeld-analyse. Deze stelling staat bekend als het **Bemonsterings-Theorema (Sampling Theorem):**

Indien een beeld wordt bemonsterd (sampled) met een frequentie groter dan of gelijk aan twee maal de hoogste frequentie die in dit beeld voorkomt, dan kan dit beeld vanuit de samples volledig worden gereconstrueerd.

We zullen niet ingaan op het bewijs van deze stelling of hoe het origineel kan worden gereconstrueerd, maar dit theorema geeft direct het gevaar van de digitale systemen weer. Bij een normale beoordelingsafstand van 30 cm is, zoals gezegd, de visuele band 250 perioden per inch. Het bemonsteren van een beeld met 500 perioden per inch, of ook wel dpi (dots per inch) genoemd, is dus voldoende om alle zichtbare informatie uit de samples te reconstrueren.
Hieruit volgt dus dat in principe iedere beveiligingstechniek, die gebaseerd is op informatie in de visuele band, zal falen bij het gebruik van hoge resolutie (>500 dpi) digitale systemen.
De beveiliging tegen dergelijke systemen zal dus in de hoge frequentie-banden moeten worden gezocht.
Het belangrijkste probleem is hierbij uiteraard hoe zinvolle informatie in deze hoge frequentie-band kan worden gezet en op eenvoudige wijze kan worden gedetecteerd.
Een gelukkige omstandigheid is echter dat bij het bemonsteren van frequenties hoger dan de helft van de bemonsteringsfrequentie zoals geëist in het bemonsteringstheorema, deze frequenties worden 'gereflecteerd' naar lagere frequenties, een verschijnsel dat bekend staat onder de naam aliasing (ook wel moiré). In tegenstelling tot de menselijke waarneming worden bij het scannen van beelden de te hoge frequenties niet als 'informatie-loos' gezien, maar als een andere (vandaar alias) frequentie. Aangezien deze frequentie-verandering is te berekenen, kan een document worden voorzien van frequenties die door de mens als informatie-loos worden gezien maar door de digitale copier worden 'vertaald' naar zichtbare frequenties.
Op dit principe is de beveiligingstechniek Screen Angle Modulation (SAM) gebaseerd, waarbij de nodige frequenties worden verkregen door de hoeken van bepaalde raster(screen)-lijntjes te roteren, afhankelijk van het gewenste beeld in de kopie. In dit geval lijkt een kopie niet meer op het origineel en is het beoogde doel bereikt (zie figuur 1 en figuur 2, respectievelijk origineel en kopie.)

Figuur 1

Figuur 2

Toch zal SAM alleen voor de toekomst niet toereikend zijn, aangezien niet alleen de resolutie van digitale systemen toe zal nemen waardoor het druktechnisch gezien

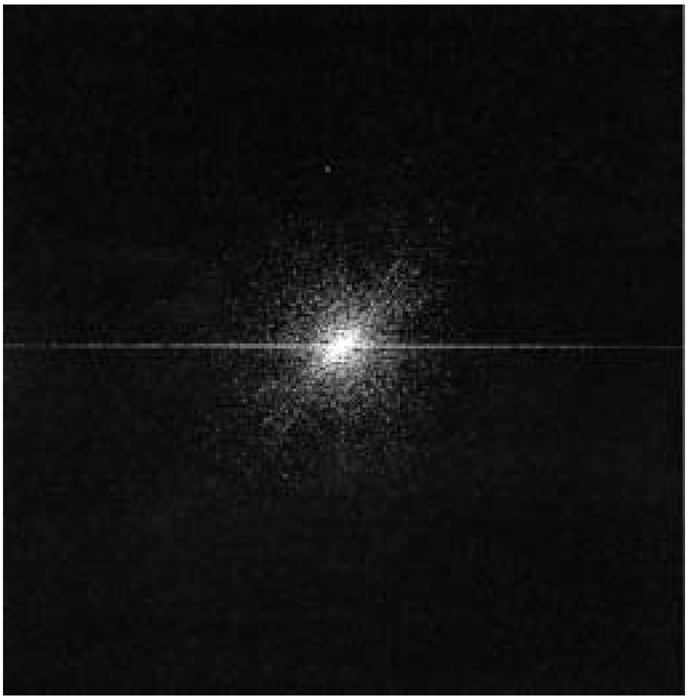
steeds moeilijker zal worden de gewenste frequenties te realiseren, maar er ook andere systemen in opkomst zijn waarmee zeer geavanceerde beeldmanipulatie kan worden uitgevoerd.
Teneinde in de toekomst hiertegen gewapend te zijn is het beveiligingssysteem Sample-Band Image Coding (SABIC) ontwikkeld.
Het principe van SABIC wordt verklaard aan de hand van de hiervoor genoemde begrippen uit de (2 dimensionale-) signaalverwerking. De toegepaste operaties spelen zich ook hier af in het frequentiedomein.
Door de ongevoeligheid van het menselijk oog voor hoge spatiële frequenties is het mogelijk deze uit het beeld weg te filteren, zonder dat hierbij belangrijke visuele informatie verloren gaat. Dit kan gedaan worden met een spatieel lowpass filter, dat alle frequentiecomponenten buiten de afsnijfrequentie elimineert. De zo vrijgekomen ruimte in het frequentie-domein kan opgevuld worden door een code-beeld, dat ontstaan is door de frequentiecomponenten van een dergelijk (gefilterd) beeld te spiegelen om horizontale en verticale assen, die liggen bij een frequentie $\pm f/2$. Deze operatie is vergelijkbaar met amplitudemodulatie: het signaal wordt op een hoogfrequente draaggolf (met frequentie f) gezet. Als de afsnijfrequentie van het gebruikte filter lager is dan de halve draaggolffrequentie, gaat bij het mengen van het originele met het codebeeld geen informatie verloren, omdat beide signalen beperkt zijn tot hun ‘eigen frequentiegebied’.

Figuur 3

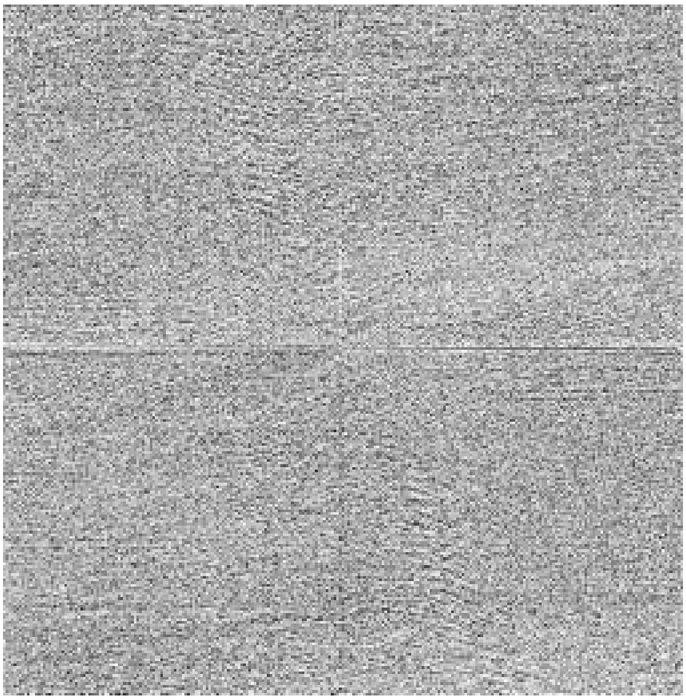
Door op het zo ontstane samengestelde beeld een highpass filter toe te passen, wordt het zichtbare (laagfrequente) gedeelte verwijderd. In het beeld wat nu overblijft is alle informatie van het codebeeld nog steeds aanwezig. Deze kan door envelopedetectie zichtbaar gemaakt worden als men de draaggolffrequentie kent.
In de praktijk kunnen de filteroperaties ook in het spatiële domein uitgevoerd worden omdat een eenvoudige benadering van een ideaal filter goed blijkt te voldoen.
Omdat deze bewerkingen met behulp van hardware zeer snel kunnen worden uitgevoerd, is het mogelijk dit binnen de copier of scanner uit te voeren.
We zullen dit alles nog eens verduidelijken aan de hand van de volgende figuren 3 t/m 10.
Van het in een willekeurig beeld te verwerken code-beeld (figuur 3), wordt de Fouriergetransformeerde bepaald (met behulp van een Fast Fourier Transform (FFT)-algoritme).
Figuur 4 geeft hierbij de amplitude en figuur 5 de fase van de Fouriergetransformeerde (en dus van de frequenties) van figuur 3. Van dit beeld worden alle frequenties gro-

ter dan de helft van de gewenste sampling frequentie gelijk aan 0 gesteld (ideale low-pass). Vervolgens worden de overgebleven frequenties gespiegeld om de assen die overeenkomen met de helft van deze sampling frequenties (zie figuur 6 en figuur 7 voor respectievelijk amplitude en fase).

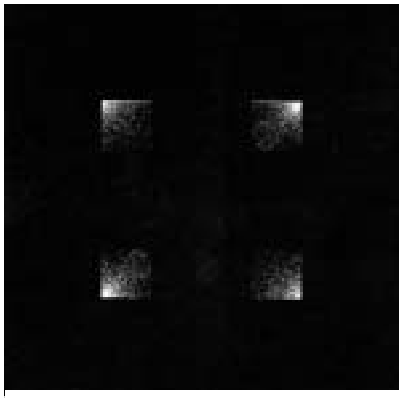
Indien hierop de inverse Fouriergetransformeerde wordt toegepast



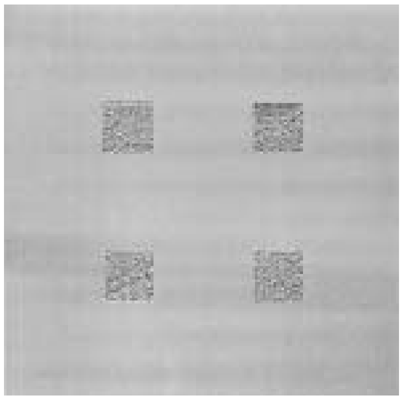
Figuur 4



Figuur 5

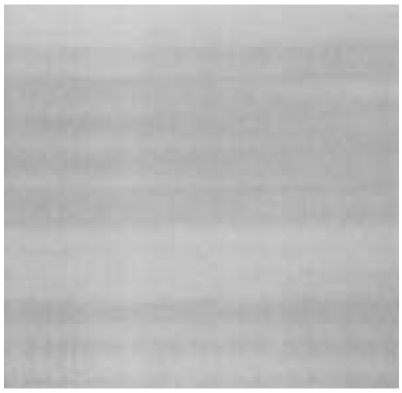


Figuur 6



Figuur 7

ontstaat een code-beeld dat uitsluitend frequenties bevat buiten de visuele bandbreedte (figuur 8), en kan dus worden toegevoegd aan een normaal waarneembaar beeld.



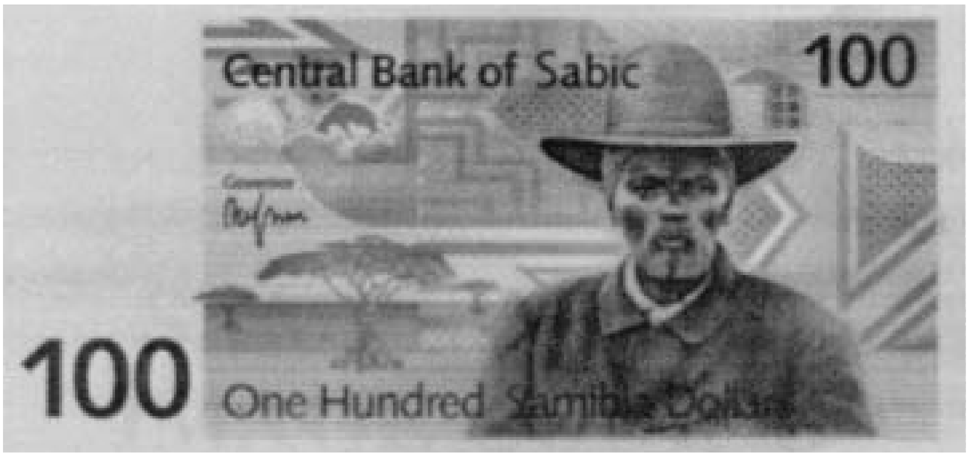
Figuur 8

Tijdens het kopiëren of scannen wordt de totale informatie, dus zichtbaar beeld en code-beeld, ingelezen. Met behulp van een high-pass filter wordt vervolgens het zichtbare beeld verwijderd. Dit

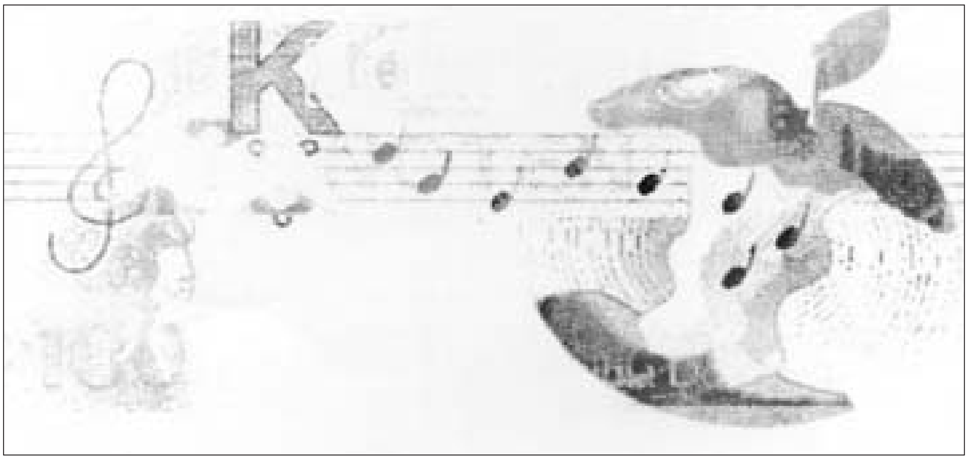
zichtbare beeld mag iedere willekeurige informatie bevatten, na toepassing van het high-pass filter is deze volledig verdwenen.

Vervolgens wordt op het resterende beeld een zogenaamde envelope-detectie toegepast, bestaande uit een 'grafische' diode en een low-pass filter. Hiermee wordt het code-beeld zichtbaar gemaakt.

Na detectie of herkenning kan worden besloten om niet het originele beeld, doch het code-beeld af te drukken.
Een toepassing op een dummy waardedocument is weergegeven in figuur 9 en figuur 10, respectievelijk origineel beeld + code-beeld en gedecodeerd code-beeld.



Figuur 9



Figuur 10

Samenvatting

SAM en SABIC zijn beveiligings-systemen die zijn ontstaan door het probleem van colour-copiers en scanners op een wiskundige manier te benaderen en gebruik te maken van het feit dat aan grafische beelden informatie kan worden toegevoegd, die voor de mens bij normale beoordelingsafstanden niet waarneembaar is.
Bij SAM wordt de informatie toegevoegd door rasterlijnen over een hoek te verdraaien afhankelijk van het gewenste beeld dat dient te ontstaan na kopiëren.
Bij SABIC wordt deze informatie aan een zichtbaar beeld toegevoegd door gebruik te maken van 'frequentie-spiegeling' van het code-beeld na Fourier-transformatie en vervolgens hierop de inverse Fourier-transformatie toe te passen. Hierbij wordt het code-beeld volkomen onzichtbaar verweven met een zichtbaar beeld.
Het in het ingescande origineel aanwezige code-beeld kan door gebruik te maken van een high-pass filter, gevolgd door een envelope-detectie zichtbaar worden gemaakt of geschikt voor verdere bewerking of analyse.
Behalve als beveiliging tegen ongeautoriseerd kopiëren kan dit beveiligingssysteem worden gebruikt als echtheidskenmerk van waardedocumenten, alsmede voor het onzichtbaar verwerken van persoonsgegevens in identiteitskaarten of andere persoonsgebonden documenten.

Getallen: eigenschappen, rijen en bewijzen

Henk Barendregt

1 Inleiding

Het eindrapport van de ministeriële Studiecommissie Wiskunde B vwo is in oktober 1994 verschenen. Dit rapport pleit voor meer abstractie, begripsvorming en bewijzen in het voortgezette wiskundeonderwijs. Daarnaast dient het programma niet te zwaar te zijn.

Niet alleen als docent aan het wetenschappelijk onderwijs maar ook als een van de initiatiefnemers van de actie 'Vierkant voor de Wiskunde' [(1] wil ik zeggen dat het rapport belangrijke aanbevelingen doet en bovendien goed leesbaar is. De juiste aandacht voor abstracties, begripsvorming en bewijzen ontbreekt in het huidige programma wiskunde B vwo. Deze aandacht is belangrijk voor het aanleren van een correcte manier van denken die ook buiten de wiskunde van belang is, met name voor andere wetenschappen. Vanuit onverwachte hoeken van de wiskunde ontstaan toepassingsmogelijkheden, waarbij begripsvorming en bewijzen een belangrijke rol spelen. Denk bijvoorbeeld aan het maken van geheime codes, waarbij de theorie van priemgetallen gebruikt wordt [(2]. Voor het schrijven van ingewikkelde software is het denken in abstracties zo belangrijk geworden, dat bedrijven behalve informatici ook wiskundigen voor dit doel in dienst nemen. Daarnaast is ook de algemene culturele vorming van het correct kunnen redeneren van belang.

Een aantal onderwerpen die in het curriculum behandeld kunnen worden, zijn door de commissie genoemd. Naast een aantal algemene opmerkingen over de aard van de wiskunde, geef ik in dit artikel wat mogelijkheden die vallen onder de in het rapport vermelde noemers 'Grepen uit de getaltheorie' en 'Rijen en recursie'. De taal die ik hanteer is bedoeld voor lezers van Euclides, maar de stof is geschikt voor leerlingen vwo.

2 Objecten en eigenschappen

In de wiskunde zijn er objecten en worden de eigenschappen daarvan bestudeerd. Nu is dit ook het geval in vele andere wetenschappen, maar in de wiskunde is het belangrijk om glashelder deze twee uit elkaar te houden.
Dat komt omdat in dit vak zowel de objecten als de eigenschappen abstracte zaken zijn. Daarentegen worden bijvoorbeeld in de schoolnatuurkunde biljartballen als objecten bestudeerd met als eigenschappen hun gedrag onder elastische botsingen. Niemand zal hier een object en zijn eigenschappen door elkaar halen. In de wiskunde echter zijn objecten niet alleen getallen maar ook functies en dergelijke, dat wil zeggen dat de objecten ook abstract zijn. Daardoor zien de huidige eerstejaars studenten wiskunde vaak het verschil niet meer tussen de twee begrippen **object** en **eigenschap**. Dit is niet goed voor de studie wiskunde, maar ook niet voor de studie informatica waar men een onderscheid dient te maken tussen een specificatie (wat de klant wil) en een programma (wat door de software-firma geleverd moet worden).

Een duidelijk hulpmiddel om de begrippen 'object' en 'eigenschap' goed uit elkaar te houden bestaat uit het invoeren van notaties.
De volgende eenvoudige definities zijn geschikt voor leerlingen die de verzameling der gehele getallen $\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$ kennen.
De proposities over de eigenschappen die volgen kunnen bewezen worden uit de commutatieve, associatieve en distributieve wetten voor de optelling en vermenigvuldiging.

Definitie: Een getal n in $\mathbb{Z}$ heet **even**, notatie $E(n)$, als $n = 2a$ voor zekere a in $\mathbb{Z}$.

Voorbeeld: E(126), E(–126) gelden; E(127), E(–127) gelden niet.
Je kunt nu de volgende stellingen bewijzen.

Propositie: Voor n,m in $\mathbb{Z}$ geldt
i. $E(n)\ \&\ E(m) \rightarrow E(n+m)$;
ii. $E(n) \rightarrow E(n \cdot m)$. [(3]

Definitie: Een getal n in $\mathbb{Z}$ heet **oneven**, notatie $O(n)$, als $n = 2a + 1$ voor zekere a in $\mathbb{Z}$.

Voorbeeld: O(127), O(–127) gelden; O(126), O(–126) gelden niet.
Dan krijg je verder als eenvoudig resultaat het volgende.

Propositie: Voor n,m in $\mathbb{Z}$ geldt
iii. $O(n)\ \&\ O(m) \rightarrow E(n+m)$;
iv. $O(n)\ \&\ O(m) \rightarrow O(n \cdot m)$;
v. $E(n)\ \&\ O(m) \rightarrow O(n+m)$.

(Waarom staat hier niet bij $E(n)\ \&\ O(m) \rightarrow E(n \cdot m)$?)

Als voorbeeld geven we nu een paar bewijzen.

Bewijs proposities (i) en (iv).
(i) Stel $E(n)\ \&\ E(m)$. Dan $n = 2a$ en $m = 2b$ voor zekere a,b in $\mathbb{Z}$.
Dus

$$\begin{aligned} n + m &= 2a + 2b \\ &= 2(a+b) \end{aligned}$$

en daarmee is $E(n+m)$ aangetoond.
(iv) Stel $O(n)\ \&\ O(m)$. Dan $n = 2a + 1$ en $m = 2b + 1$ voor zekere a, b in $\mathbb{Z}$.
Dus

$$\begin{aligned} n \cdot m &= (2a+1)(2b+1) \\ &= 4ab + 2a + 2b + 1 \\ &= 2(2ab + a + b) + 1 \end{aligned}$$

en daarmee is $O(n \cdot m)$ aangetoond.

Het kost verder weinig moeite te bewijzen dat er geen getal zowel even als oneven is. Iets moeilijker is het om te bewijzen dat een getal hetzij even hetzij oneven is.

3 Functies, recursie en inductie

In de vorige paragraaf zagen we dat wiskunde gaat over eigenschappen van een zekere collectie objecten. Om die eigenschappen te definiëren spelen functies een rol. Zo definieerden we

$$E(n) \Leftrightarrow n = f(a) \text{ voor zekere } a \text{ in } \mathbb{Z}, \text{ waar } f(a) = 2a.$$

Wiskunde waarin alleen gesproken wordt over eenvoudige objecten zoals getallen of meetkundige figuren wordt ook wel **elementaire** wiskunde genoemd. Dat zegt overigens niets over de moeilijkheidsgraad van die wiskunde. In de zogenaamde **hogere** wiskunde zijn de objecten geen getallen of meetkundige figuren meer, maar bijvoorbeeld functies of andere verder gaande abstracties. Hogere wiskunde hoeft niet moeilijker te zijn dan de elementaire. Doordat velen tegenwoordig wel eens software gekocht hebben kun je zeggen dat **hogere** objecten zoals functies gemeengoed zijn geworden [4]. Wel moet men er nog precies mee leren omgaan [5].

In deze paragraaf zullen we kort ingaan op een paar mogelijkheden voor het onderwijs van de begrippen rij, recursie en inductie.

Definitie: Een **rij** in een verzameling A is een functie $x: \mathbb{N} \rightarrow A$.
Hier is $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, de verzameling natuurlijke getallen. We beschouwen alleen rijen in $\mathbb{N}$.

Voorbeeld: De rij n-faculteit, notatie $n!$, is gedefinieerd door

$$x(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n. \qquad (*)$$

Bijvoorbeeld $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$; $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. De definitie (*) is niet helemaal precies. Wij weten wel wat er op de … moet staan, maar deze uitdrukking is niet voldoende duidelijk voor bijvoorbeeld een computer. We kunnen deze rij nu ook definiëren door middel van de zogenaamde **recursie**.

$$\begin{aligned} &0! = 1; \\ &(n+1)! = n!(n+1). \end{aligned}$$

(Aan de leerlingen moet duidelijk gemaakt worden dat $0! = 1$ een conventie is die de recursie – de tweede vergelijking – ook voor $n = 0$ geldig maakt.)

Eigenschappen van rijen gedefinieerd met recursie kunnen vaak bewezen worden met het principe van **volledige inductie**, voor het eerst geformuleerd door B. Pascal (1623 - 1662). Het stelt ons in staat om (in eindige tijd) een eigenschap P voor alle (oneindig veel) natuurlijke getallen te bewijzen.

Stelling (volledige inductie).
Laat P een eigenschap van natuurlijke getallen zijn.
Stel dat gegeven is
$P(0)$ (***basis***);
$P(x) \rightarrow P(x+1)$, voor alle x in $\mathbb{N}$. (***inductiestap***).

Dan geldt
$P(x)$ voor alle x in $\mathbb{N}$.

Bewijs.
Gegeven is P(0). Met behulp van de inductiestap volgt P(1). Weer met behulp van de inductiestap volgt P(2). Dan volgt net zo P(3), P(4), enzovoort. Dus geldt $P(x)$ voor alle x in $\mathbb{N}$. QED.

Om dus P(x) voor alle x in $\mathbb{N}$ te bewijzen is het voldoende om te bewijzen de basis P(0) en de inductie stap P(x) → P(x + 1), dat wil zeggen uitgaande van P(x) moet P(x + 1) bewezen worden. De aanname P(x) wordt de **inductiehypothese** genoemd.

Met volledige inductie kunnen we nu inderdaad eigenschappen bewijzen van rijen gedefinieerd met recursie. Bijvoorbeeld het feit dat n! goed gedefinieerd is voor alle n in $\mathbb{N}$ kan bewezen worden met behulp van inductie. Om dit te doen definiëren we

$G(n) \Leftrightarrow n!$ is goed gedefinieerd [6].

Er geldt

$G(0)$. Immers $0! = 1$.

$G(n) \rightarrow G(n+1)$. Immers $(n+1)! = n!(n+1)$.

Met inductie volgt G(n), dat wil zeggen n! is goed gedefinieerd, voor alle n in $\mathbb{N}$.

Als oefening kan de leerling de volgende rijen definiëren met behulp van recursie:

$b(n) = 1 + 2 + \ldots + n$;

$c(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

Met volledige inductie kun je bewijzen dat het volgende geldt.

Stelling: Voor alle n in $\mathbb{N}$ geldt $b(n) = \frac{1}{2}(n+1)n$.

Bewijs: De recursieve definitie is

$$b(0) = 0 \text{ en } b(n+1) = b(n) + (n+1).$$

Het inductiebewijs gaat als volgt.
Noem P(n) de uitspraak $b(n) = \frac{1}{2}(n+1)n$.
Met inductie bewijzen we P(n) voor alle n in $\mathbb{N}$.

Basis: P(0).
Inderdaad is P(0) juist, immers $b(0) = 0$.
Inductiestap: $P(n) \rightarrow P(n+1)$.
Stel dat P(n) geldt (inductiehypothese); dan is
$b(n+1) = b(n) + (n+1)$,
$= \frac{1}{2}(n+1)n + (n+1)$,
volgens de inductiehypothese,
$= \frac{1}{2}(n^2 + n + 2n + 2)$,
$= \frac{1}{2}(n+2)(n+1)$,
dat wil zeggen P(n + 1) geldt.
Met inductie volgt nu P(n) voor alle n in N. QED.

De bewezen uitdrukking voor $b(n)$ kan ook op andere manieren bewezen worden (met meetkundig inzicht bijvoorbeeld). Het is goed zo'n alternatief bewijs te geven. Maar voor $c(n)$ is een dergelijke uitdrukking het beste met inductie te bewijzen. Om die uitdrukking voor $c(n)$ te vinden kan de leerling aangespoord worden de zogenaamde **onvolledige** inductie toe te passen. Dat houdt in de waarden van $c(n)$ uitschrijven voor $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ totdat de leerling een verband vindt. Wellicht is hulp van de docent hier gewenst.

Ik hoop aangetoond te hebben dat abstracties niet ingevoerd worden om dingen moeilijker te maken, maar om de zaken te vereenvoudigen. Per slot van rekening zijn de begrippen 'donderdag' en 'jaar' ook abstracties. En een begrip als 'schrikkeljaar' is zelfs een abstractie op een abstractie, een hogere abstractie dus, die iedereen kan begrijpen.

noten

1 De actie Vierkant heeft als één van haar doelstellingen naast het aspect van nuttigheid ook de aantrekkelijke kanten van wiskunde bij een bredere groep mensen (vooral leerlingen van het voortgezette onderwijs) kenbaar te maken. Als middel hiertoe richt de actie zich onder andere op het voor leerlingen organiseren van clubs en kampen en het uitgeven van 'doeboeken', waarbij de zelfwerkzaamheid en creativiteit geprikkeld worden.

2 Een advertentietekst, die ik alweer een aantal jaren geleden gezien heb, luidde: 'De Marine in Den Helder zoekt een wiskundige (m/v). Kennis van de getaltheorie strekt tot aanbeveling.' Het is duidelijk dat men daar expertise in de cryptografie aan het opbouwen is.

3 De bewijzen dienen uiteraard gegeven te worden, maar zijn hier meestal weggelaten. Ik hoop dat de lezer zin heeft de bewijzen te construeren en het ermee eens is dat deze geschikt zijn om aan leerlingen te onderwijzen.

4 Een buschauffeur (van lijn 66 in Amsterdam) besprak met een collega (op weg naar het CWI; maar dat was toevallig) hoe de werking was van een nieuw operating system voor een PC. Het gesprek ging dus over een eigenschap van een behoorlijk abstract object!

5 Dat is zelfs zo in professionele kringen: de software-crisis (het feit dat complexe software zelden correct is en zelden op tijd wordt afgeleverd) wordt veroorzaakt door dat men onvoldoende vertrouwd is met abstracties.

6 Deze eigenschap G gebruikt dus het begrip 'goed gedefinieerd'. Dit kan wiskundig precies gemaakt worden door een eigenschap met twee argumenten (een relatie) R(n, m) in te voeren die er op neerkomt dat $m = n!$.
De eigenschap G kan dan gedefinieerd worden als
G(n) $\leftrightarrow$ er is een unieke m zodat R(n, m).

Kosten-verdeelproblemen

Thijs Jansen[1]
Hans Peters[1]

Voorwoord

Dit artikel gaat over kostenverdeelproblemen. De aanleiding tot dit artikel is niet alleen de kostenproblematiek zelf – hoe interessant die ook is – maar ook onze ervaring met leerstof van dit type voor doctoraalstudenten in de Bedrijfseconomie. We geven hier, met het oog op de beschikbare ruimte, slechts een sterk verkorte versie van het artikel: de volledige versie is in rapportvorm beschikbaar en kan opgevraagd kan worden bij de auteurs. Dit rapport is op zijn beurt weer een vereenvoudigde versie van een stukje moderne economische literatuur.
Met dit artikel pogen wij een onderwerp aan te bieden dat (met wellicht nog de nodige vereenvoudigingen) geschikt zou kunnen zijn voor het wiskundeonderwijs aan vwo-leerlingen, dat toepassingsgericht is en tevens de mogelijkheid biedt op een meer formele manier met wiskunde om te gaan dan gebruikelijk is binnen het Wiskunde A-programma. Het onderwerp sluit nauw aan bij een bestaande cursus voor doctoraalstudenten in de Bedrijfseconomie; het tempo ligt daar hoger, maar het formeel-wiskundig niveau is in feite zelfs lager. Wij presenteren in dit artikel een axiomatische onderbouwing van enkele kostenverdeelregels. De stof is in wiskundig-technische zin niet zo moeilijk, lijkt ons, maar wellicht wel in wiskundig-logische en conceptuele zin. Ook studenten in het hoger onderwijs hebben daar de grootste moeite mee. Wij zouden er dan ook niet op tegen zijn als het bij het wiskundeonderwijs aan het vwo meer aandacht aan logica en wiskundige bewijsvoering besteed werd, zeker nu de klassieke meetkunde grotendeels uit het programma verdwenen is. Wij hopen dat dit artikel in ieder geval een manier aangeeft waarop dat zou kunnen.
Men zou zich kunnen afvragen of een dergelijke formele benadering van een concreet en tamelijk alledaags probleem als het kostenverdeelprobleem eigenlijk wel nuttig is voor studenten in de bedrijfseconomie of vergelijkbare richtingen. Ons antwoord daarop zou ontkennend zijn, mits studenten in staat zijn dergelijke problemen op een logisch consistente manier verbaal aan te pakken. Dat blijkt in de (onderwijs)praktijk echter problemen op te leveren die misschien wel vergelijkbaar zijn met de problemen die men heeft met wiskundig-logisch redeneren. Vandaar dat volgens ons een formele benadering nuttig is, ook als studenten in de eerste plaats een praktijkgerichte opleiding krijgen.

1 Inleiding

Aart, Bas en Cees dineren samen in een restaurant. Bij het eten drinken ze wijn: Aart één glas, Bas drie glazen en Cees, die wel van een glaasje houdt, zes glazen. Die wijn wordt besteld per karaf van een halve liter en zo'n karaf wijn bevat vijf glazen en kost vijf gulden. Bij het afrekenen stelt Aart voor de kosten van de wijn evenredig te verdelen: één gulden voor hemzelf, drie gulden voor Bas en zes gulden voor Cees. Bas vindt dat wel redelijk maar Cees, die na die zes glazen wel trek heeft in een stevige discussie, stelt voor dat Aart *f* 1,66 betaalt en dat Bas en hij de overige kosten delen. Aart en Bas kijken Cees bevreemd aan, en dus legt Cees uit hoe hij aan die bedragen komt. 'Stel dat wij allemaal ons eerste glas drinken. Wij bestellen daartoe een karaf wijn van vijf gulden, en het is niet meer dan redelijk dat we de kosten daarvan delen: we dragen dus ieder *f* 1,66 bij. Aart heeft dan genoeg gehad, maar Bas en ik drinken vervolgens ieder nog twee glazen. Daartoe moeten we een karaf bijbestellen, en het is niet meer dan redelijk dat Bas en ik die kosten delen. Tenslotte drink ik het restant van drie glazen op, jullie hoeven immers niet meer.'
Aart laat het daar niet bij zitten en protesteert heftig. 'Cees,' zegt hij, 'jij maakt misbruik van het feit dat de wijn hier per karaf komt. Stel dat we per glas konden betalen, dan zou je mijn evenredige verdeling toch zeker heel redelijk vinden. Waarom nu dan niet!'
Cees geeft geen rechtstreeks antwoord maar stelt een wedervraag. 'Ja,' zegt hij, 'stel dat de wijn per glas betaald wordt maar dat de eerste drie glazen, dus één

per persoon, gratis zijn. Dan zul je vast niets voor de wijn willen betalen. Waar blijf je dan met je evenredige verdeling!' Bas ziet de bui al hangen - hij moet de dag daarna met Aart gaan dineren - en kiest de zijde van Cees.
Merk op dat deze discussie vooral gebaseerd is op argumenten waarbij verwezen wordt naar andere mogelijke kostenverdeelproblemen. Deze benadering leent zich uitstekend voor een wiskundige formulering. Daartoe introduceren we zogenoemde kostenverdeelregels. Zo'n verdeelregel is een 'functie' die aan elk mogelijk verdeelprobleem een verdeling van de kosten over alle betrokkenen toevoegt. Op die manier ben je in staat bij elk kostenverdeelprobleem uit te rekenen hoeveel elk van de betrokkenen aan de kosten moet bijdragen. In plaats van te discussiëren over de voors en tegens van een verdeelregel, beschrijven we de (wiskundige) eigenschappen van de functie. Zoals in een discussie goede argumenten aanleiding kunnen zijn om te kiezen voor een bepaalde manier om de kosten te verdelen, zo kunnen fraaie eigenschappen van een functie doorslaggevend zijn bij het kiezen van een functie.

In het rapport bestuderen we twee verdeelregels (en hun eigenschappen), namelijk de door Aart gehanteerde *evenredigheidsregel* en de door Cees voorgestelde *volgorderegel*. In deze korte samenvatting beperken we ons tot een introductie van beide regels aan de hand van enkele voorbeelden. We beseffen dat we hiermee onze eigen doelstelling tekort doen – we komen niet toe aan een beschrijving van eigenschappen, laat staan aan een karakterisering – maar hopen dat de belangstelling van de lezer in ieder geval gewekt is.

2 Een wiskundige beschrijving

We bekijken een situatie waarbij 3 personen, *agenten* genaamd, elk een bepaalde hoeveelheid van een zeker produkt hebben besteld. Zij vragen zich af hoe ze de totale kosten onderling moeten verdelen. We zullen twee manieren beschrijven om dit probleem via zogenoemde *(kosten)verdeelregels* op te lossen.

Voorbeeld 1.
Veronderstel dat 3 agenten een aantal eenheden willen aanschaffen van een bepaald produkt. Het produceren van de eerste 10 eenheden van dit produkt kost niets. Zijn er eenmaal 10 eenheden gemaakt, dan kost de produktie van elke volgende eenheid 1 gulden.
We hebben blijkbaar te maken met de kostenfunctie C gegeven door

$$C(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leq 10 \end{cases}$$

Wanneer de agenten achtereenvolgens 3, 5 en 7 eenheden willen aanschaffen, dan moeten er 15 eenheden worden geproduceerd. Dit kost 5 gulden. Hoe moeten deze kosten over de agenten worden verdeeld?
Een voor de hand liggende verdeling van de kosten is op de volgende eenvoudige redenering gebaseerd. Omdat agent 1 over het $\frac{3}{15}$-de deel van de totale produktie van 15 eenheden wil beschikken, moet hij het $\frac{3}{15}$-de deel van de totale totale kosten voor zijn rekening nemen. Hij zal dus 1 gulden moeten betalen. Evenzo kan agent 2 een rekening van $\frac{5}{15} \times 5 = \frac{5}{3}$ gulden tegemoet zien, terwijl agent 3 het resterende bedrag van $\frac{7}{15} \times 5 = \frac{7}{3}$ gulden voor zijn rekening moet nemen.

Baseren we een verdeling van kosten op de hiervoor toegepaste redenering dan zeggen we in het vervolg dat we de *evenredigheidsregel* toepassen.

Zou je in voorbeeld 1 in de positie van agent 1 verkeren, dan zou je misschien bezwaar maken tegen de verdeling zoals die in het voorbeeld is voorgesteld. Je zou je bezwaar kunnen baseren op de volgende redenering. Als iedereen evenveel zou bestellen als ik, zou ik niets hoeven te betalen. Waarom moet ik meebetalen aan de kosten die samenhangen met het produceren voor de agenten die meer eenheden willen hebben dan ikzelf?

Met het oog op deze redenering zullen we nog een tweede, meer subtiele, manier om kosten te verdelen onderzoeken. Bij deze alternatieve manier willen we natuurlijk tegemoet komen aan het bezwaar dat volgens agent 1 kleeft aan de evenredigheidsregel.
Om een eerste indruk van de zogenoemde *volgorderegel* te krijgen, bekijken we de situatie waarbij 3 agenten betrokken zijn. De vraag van agent i geven we aan met q_i, terwijl C een willekeurige kostenfunctie voorstelt. Wij veronderstellen gemakshalve dat $q_1 < q_2 < q_3$.
We zullen een verdeling van de kosten voorstellen waarbij elke agent evenveel betaalt voor zijn eerste q_1 eenheden. We veronderstellen daartoe dat elke agent in eerste instantie niet meer dan q_1 eenheden wil hebben. Deze kosten dan $C(3q_1)$ (we zullen vanaf nu niet meer vermelden in welke geldeenheid de kosten zijn uitgedrukt). Elke agent moet nu voor zijn eerste q_1 eenheden

$$\frac{C(3q_1)}{3}$$

betalen. Omdat agent 1 niet meer dan q_1 eenheden wil hebben is het totale bedrag dat hij moet betalen gelijk aan $C(3q_1)/3$.

De overige (twee) agenten laten we evenveel betalen voor de volgende $q_2 - q_1$ eenheden. We veronderstellen daartoe dat de eerste agent q_1 eenheden wil hebben en de andere agenten elk q_2 eenheden. Omdat de eerste q_1 eenheden van elke agent al zijn afgerekend moeten de agenten 2 en 3 elk

$$\frac{C(q_1 + 2q_2) - C(3q_1)}{2}$$

'bijbetalen'. Agent 3 tenslotte moet voor de resterende $q_3 - q_2$ eenheden het nog open staande bedrag betalen. We lichten deze methode toe in het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 2
Kiezen we q_1, q_2, q_3 en C als in voorbeeld 1, dan moet voor de eerste 3 eenheden

$$\frac{C(3 \cdot 3)}{3} = 0$$

worden betaald. Voor de volgende $5 - 3 = 2$ eenheden moet

$$\frac{C(3 + 2 \cdot 5)}{2} = 1\tfrac{1}{2}$$

worden betaald. Dit betekent dat agent 1 niets betaalt, terwijl de tweede agent $0 + 1\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$ betaalt. Agent 3 betaalt het restant dat gelijk is aan $5 - 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$. Dit betekent overigens dat hij voor de laatste $7 - 5 = 2$ eenheden 2 moet betalen.

3 Tot slot

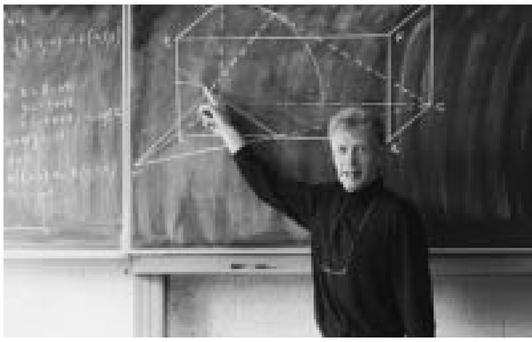
Het (wiskundige) verhaal is hiermee nog niet af. Het mondt uit in twee stellingen waarin achtereenvolgens de evenredigheidsregel en de volgorderegel volledig gekarakteriseerd worden. Deze karakteriseringen zien er als volgt uit.

De evenredigheidsregel is de enige verdeelregel die *uniform* en *monotoon* is. Hierbij betekent de uniformiteit van een regel het volgende: als het produceren van één eenheid *a* gulden kost (ongeacht de produktieomvang) dan moet elke agent *a* gulden per eenheid betalen. De monotonie van een regel geeft aan dat elke agent bij een verhoging van de kosten en bij onveranderde vraag minstens zoveel moet betalen als vóór de verhoging.

De volgorderegel is de enige verdeelregel die *additief* is, de *nul-eigenschap* heeft, *consistent* is en de *egalitaire-eigenschap* heeft. Hierbij betekent de additiviteit van een regel het volgende: als een kostenfunctie de som is van twee andere kostenfuncties, dan betaalt elke agent de som van wat hij zou moeten betalen als deze kostenfuncties afzonderlijk zouden gelden. Met de nul-eigenschap geven we aan dat een agent niets hoeft te betalen als de kosten voor *n* maal zijn vraag 0 bedragen. Met consistentie bedoelen we de volgende eigenschap: is voor de agent met de laagste vraag vastgesteld wat hij moet betalen, dan ontstaat er voor de overblijvende $n-1$ agenten een nieuw kostenprobleem; voor dit nieuwe probleem betalen deze agenten hetzelfde als in het oorspronkelijke probleem. De egalitaire-eigenschap betekent: zijn de totale kosten van *n* maal de laagste vraag gelijk aan de totale kosten van de totale vraag, dan betaalt elke agent het *n*-de deel van de totale kosten.

1 Rijksuniversiteit Limburg, Faculteit der Economische Wetenschappen, Vakgroep Kwantitatieve Economie, Postbus 616, 6200 MD Maastricht, tel.: 043-883835.

Kees Bouwmeester, 56 jaar, is sinds zijn 22e leraar aan het Da Vinci College (voorheen: Ignatius College) te Purmerend.
De school omvat vwo, havo en mavo en telt 1600 leerlingen. In de bovenbouw van het vwo zitten 163 leerlingen, ongeveer 40 % van hen volgt wiskunde B.
Kees Bouwmeester heeft dit jaar drie examengroepen (vwo wiskunde A en B, havo wiskunde B), een 4 vwo-klas, een 4 havo-klas met wiskunde B, en twee brugklassen.
De vragen in dit interview zijn toegespitst op wiskunde B in het vwo.



Wat vind je het belangrijkste in het analyse-programma?
In de hele wiskunde gaat het om redeneren en bewijzen, op dit moment ligt de nadruk te veel op de technieken. Dat is ook het onaantrekkelijke van de gonio, al is de gonio belangrijk bij natuurkunde. Technische vaardigheid is zeker bij natuurkunde een vereiste. Daar hebben we rekening mee te houden, want negen van de tien leerlingen met wiskunde B volgen ook natuurkunde.
Maar het bewijzen blijft ook belangrijk. Een tijdje terug werkte ik met een paar leerlingen aan parameterkrommen. Daarbij probeerden we op het spoor te komen van de symmetrie en deze vervolgens te bewijzen. Dan ben je echt bezig een stuk wiskunde te veroveren. Zo heb ik ook wel eens wat aan volledige inductie gedaan. Het redeneren is natuurlijk steeds de hoofdzaak.

INTERVIEW

'Wiskunde B: voor het beste wat de wiskunde te bieden heeft'

Martinus van Hoorn

Vind je dat de integraalrekening moet blijven?
Ja, vooral elementair. De substitutiemethode als inverse van de kettingregel. Partiële integratie hoeft niet, omdat leerlingen het verband met de produktregel niet meer zien. Het bepalen van primitieven doet een beroep op het denkvermogen.

Hoe kijk je aan tegen computeralgebra?
Dat moet wel een hulpmiddel blijven. Je kunt gonio-functies transformeren en dan snel zien wat er gebeurt met behulp van computer-algebra. Ik werk wel met VU-grafiek. De plaatjes zeggen veel.

Er wordt veel gepraat over toepassingen. Die zijn natuurlijk belangrijk. Veel leerlingen, de meeste, komen later hoogstens met toepassingen in aanraking. Dat pleit toch voor het opnemen van toepassingen in het programma?
Toepassingen zitten in wiskunde A. Daar krijgen leerlingen een goed beeld van de betekenis van toepassingen. Wiskunde B moet het beste geven wat de wiskunde te bieden heeft.
In het analyse-programma in wiskunde B hoeven geen toepassingen. In de ruimtemeetkunde zouden iets meer toepassingen kunnen, het zou iets de kant van de ruimtemeetkunde in het havo B-programma op kunnen gaan.
Wij raden de leerlingen trouwens niet aan om A èn B te kiezen, behalve als ze 8 vakken hebben (wat bij ons nogal wat leerlingen doen). Maar 2 van de 7 vakken wiskunde, dat is te beperkt.

Wat doen jullie aan het zelfstandig werken door leerlingen, zoals bepleit in de beide Profielnota's voor de Tweede Fase Voortgezet Onderwijs, waarover nu ook de Staatssecretaris positief is? Wat gebeurt er dan nog aan de basisvaardigheden?
Wiskunde B leent zich minder voor zelfstandig werken dan wiskunde A. De docent die zijn vak op een enthousiaste manier overbrengt heeft uitstraling. Dat mag je niet weggooien.
Met wiskunde A in 5 vwo doen we al iets, de leerlingen zitten dan niet meer verplicht altijd in het klasselokaal.
Via bijvoorbeeld het afnemen van testjes moeten we een diagnose stellen. Is de basis niet stevig genoeg, dan is er onderhoudswerk nodig. Ik wil ook een methode die daarbij steun biedt.

In technische vervolgopleidingen wordt statistiek belangrijker. Moet dat tot uiting komen in het B-programma?
Het moet gaan om echte kansrekening en statistiek. Beschrijvende statistiek hoeft niet. Het is jammer dat er voor kansrekening en statistiek geen plaats is in een B-programma. Overlading is echter een nog slechter alternatief.

Er wordt gesproken over een revival van de klassieke meetkunde. Is daar behoefte aan?
De analytische meetkunde heeft veel kapot gemaakt. Gelijkvormigheid van figuren, het zoeken naar gelijke hoeken, dat zijn dingen die overal terug komen. Net als het bekijken van de resultaten van spiegelingen, symmetrie. De oude meetkunde van de driehoek hoeft niet terug te komen.
Het havo B-programma geeft goede ideeën voor een invulling van het meetkundeprogramma voor het vwo.

Voor bovenbouw-leerlingen kunnen projecten of thema's belangrijk zijn. Ook B-leerlingen moeten zelfstandig ergens aan kunnen werken. Zie je daar mogelijkheden voor?
Ja, ik zeg het nog maar een keer: het gaat om het beste wat de wiskunde te bieden heeft. De opleiding voor het examen is te veel een kwestie van dresseren. Je moet dus zorgen voor méér dan dat. Ik heb in de voorstellen die er nu liggen beslist vertrouwen.
Ook de invoering van de getaltheorie vind ik heel mooi.
In 6 vwo hebben we één van de 5 schoolonderzoeken gereserveerd voor speciaal geselecteerde onderwerpen, zoals:
- *de rij van Fibonacci en de gulden snede;*
- *complexe getallen en fractals;*
- *16 maal zo groot (over oppervlakten tussen derdegraads krommen en hun raaklijnen);*
- *kromming;*
- *kettinglijn en parabool;*
- *oneindig;*
- *de grootste zichthoek.*

Zo leren leerlingen op een andere manier tegen de wiskunde aan te kijken. De verwondering motiveert en nodigt uit tot vragen stellen.
Ik propageer ook van harte het meedoen aan Olympiades en aan de Kangoeroe-wedstrijden. Ik zou wel een extra examenzitting willen met opgaven zoals in de eerste ronde van de Wiskunde Olympiade.

Wiskunde B

Guido Helmers

Ik ben een eerstejaars wiskundestudent en heb het vak wiskunde B in het vwo met plezier gevolgd. Toen mij gevraagd werd een stukje te schrijven over WB en ik over het vak ging nadenken, bleek toch dat ik niet helemaal tevreden was over de behandelde stof en bijbehorende opgaven. Om uit te leggen hoe het vak (nog) leuker en interessanter kan worden zal ik de WB-leerlingen in twee groepen indelen.

De eerste groep bestaat uit leerlingen die WB volgen uit interesse, of omdat ze het vak nodig hebben voor een exacte vervolgstudie (wiskunde, natuurkunde, technische studies…). Ook ik volgde het vak uit interesse (en besloot vervolgens wiskunde te gaan studeren). Ik vind dat de behandeling van WB-stof erg oppervlakkig was; bewijzen van stellingen en formules werden nauwelijks behandeld en de formules die je werden voorgeschoteld moesten tientallen keren worden ingevuld en uitgerekend. Mijn eerste kennismaking met de quotiëntregel voor differentiëren is hier een voorbeeld van:

De quotiëntregel

Noem $\phi(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$, kortweg $\phi = \dfrac{t}{n}$ (met t van teller en n van noemer).

$\phi = \dfrac{t}{n}$, dus $\phi n = t$

$\phi n' + \phi' n = t'$ — *links en rechts differentiëren*

$\phi' n = t' - \phi n'$ — *ϕ' vrijmaken*

$\phi' = \dfrac{t' - \phi n'}{n}$ — *$\phi = \dfrac{t}{n}$ invullen*

$\phi' = \dfrac{t' - \frac{t}{n} n'}{n}$ — *teller en noemer maal n*

$\phi' = \dfrac{nt' - tn'}{n^2}$

$\varphi = \dfrac{t}{n} \Rightarrow \varphi' = \dfrac{nt' - tn'}{n^2}$ **quotiëntregel**

Omdat naast het bewijs van de regel een grijze balk staat, die erop duidt dat dit geen verplichte stof is, werd dit bewijs niet behandeld. Wel moesten tientallen keren simpele functies zoals $f(x) = (3x^2 + 5x)/(9x^3)$ worden gedifferentiëerd. Toch vroeg ik me vaak af waarom bepaalde stellingen waar waren, maar omdat de bewijzen ervan niet tot de verplichte stof behoorden ging ik daar verder niet op in.

Nu heb ik een periode op de RUG achter de rug, en heb voor de vakken analyse en lineaire algebra een tentamen gemaakt. Vragen die op een tentamen gesteld werden waren: 'Bestaan er lineaire afbeeldingen van $\mathbb{R}_3$ naar $\mathbb{R}_2$?' en 'Bewijs dat iedere surjectieve lineaire afbeelding van de lineaire ruimte bestaande uit polynomen van graad $<$ 2 naar $\mathbb{R}_3$ inverteerbaar is.' Dit soort vragen moet worden beantwoord door het combineren van definities en eerder bewezen stellingen; omdat bij WB nauwelijks aandacht wordt besteed aan het bewijzen van stellingen, vind ik dat WB je slecht voorbereidt op de studie wiskunde.

Zo had ik, na 5 weken linaire algebra te hebben gevolgd, nog veel moeite met de 2 vraagstukken *bovenaan pagina 304* uit het lineaire algebra-tentamen, en gelijksoortige vragen.

Conclusie: wat mij betreft mag er dieper op de stof worden ingegaan (Wat ik erg belangrijk vind: voer de begrippen limiet, continuïteit en differentiëerbaarheid veel preciezer in! En wat stelt integreren precies voor?), en ik vind dat de bewijzen van stellingen moeten worden verplicht (en dus ook op de examens teruggevraagd; wat op een examen niet gevraagd zal worden, wordt door niemand geleerd.)

Leerlingen die het vak niet graag willen maar wel moeten volgen vormen de tweede groep. Deze leerlingen volgen WB omdat ze bijvoorbeeld natuurkunde (dat weer een vereiste is voor bijv. de studie medicijnen) in hun pakket hebben. Bij mij in de klas zaten veel leerlingen die WB erg moeilijk en niet interessant vonden en bijna niemand van hen zat daarom te wachten op meer diepgang. De tijd om dieper op de stof in te gaan was er echter wel: het maken van opgaven, dat veruit het grootste deel van de tijd in beslag nam, was vaak niet meer dan het invullen van formules. De tijd die het maken van 'invuloefeningetjes' kostte, had wat mij betreft voor een deel aan de behandeling van meer theorie mogen worden besteed.

Omdat wiskunde behoorlijk abstract is en voor sommigen dus moeilijk te begrijpen, en omdat ik me (niet als enige) wel eens afvroeg: 'Wat kun je later met wiskunde?' of 'Wat heb je aan deze formule?' (veel definities en stellingen lijken op het eerste gezicht nutteloos), zou ook iets meer aandacht moeten worden besteed aan toepassingen van de wiskunde. In tegenstelling tot het vak wiskunde A, wordt bij het vak wiskunde B eigenlijk nooit een 'praktijkprobleempje' behandeld. Toch zou dit wel moeten gebeuren; het maakt het vak naar mijn idee begrijpelijker en dus aantrekkelijker voor degenen die het vak met weinig zin volgen. Zo stonden in een boek (Getal en Ruimte, deel 5/6V-B2) dat werd gebruikt in de laatste klassen van het vwo, ongeveer 5 toegepaste opgaven waarvan er niet een werd behandeld. Twee voorbeelden van deze opgaven zijn: het rekenen aan het verval van radioactieve stoffen en een leegstromend vat water (waarvan bijvoorbeeld het volume van het water in het vat op een bepaald tijdstip moest worden

lees verder op blz. 304 ▼

40 jaar geleden

Algebra

E Bepaalt U eens de hogere-machtsvergelijking van zo laag mogelijke graad en met gehele coëfficiënten waarvan $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ een wortel is.

C Ziet dit niet direct, maar stelt tenslotte $x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ en leidt daaruit af $(x-\sqrt{2})^3=3$, of $x^3-3x^2\sqrt{2}+6x-2\sqrt{2}=3$. Hij schrijft daarvoor $x^3+6x-3=(3x^2+2)\sqrt{2}$ en kwadrateert nogmaals, hetgeen tot

$$x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1=0 \qquad (1)$$

voert.

E Heeft (1) nu nog andere wortels dan $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$?

C Ja, door de beide machtsverheffingen heb ik wortels ingevoerd.

E Bepaalt U eens de overige wortels van (1).

C Ook $-\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ is een wortel, want als men $(x+\sqrt{2})^3=3$ op dezelfde wijze behandelt als we $(x-\sqrt{2})^3=3$ hebben gedaan, komt men ook tot (1). Daaruit volgt nu zonder moeite, dat ook

$$\underline{2\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}\pm i\sqrt[6]{3^5}} \quad \text{en} \quad \underline{-2\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}\pm i\sqrt[6]{3^5}}$$

wortels zijn. Nu hebben we dus alle wortels van (1) gevonden.

E Waarom alle?

C Omdat de vergelijking (1) van de zesde graad is en dus juist zes wortels heeft.

Weergave van een mondeling examen K I, in Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 42, 1954-1955 (E=examinator, C=candidaat)

Werkblad

De stelling van Thales*)

Figuur 1

1 Teken hiernaast een halve cirkel met eindpunten *A* en *B* en neem een willekeurig punt *C* op de halve cirkel, dat niet samenvalt met *A* en *B*.

Hoe groot is hoek *ACB* volgens jou?
Schatting: ....

Meet nu de hoek met je geodriehoek.
Gemeten: ....

Je meting is niet zo nauwkeurig. Verder kun je met metingen nooit bewijzen dat voor alle C-s de hoek bij C 90° is, al blijkt dat (toevallig of niet) altijd het geval te zijn.
Nu zullen we de volgende stelling bewijzen:

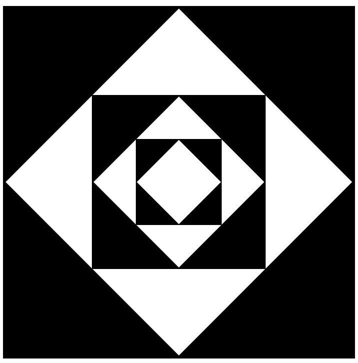
I) Als *A* en *B* eindpunten zijn van een middellijn van een cirkel en C is een ander punt op die cirkel, dan is $\angle ABC = 90°$.

bewijs ....
....
....
....
....
....
....

2 Teken voor het bewijs de hulplijn *CO* als *O* het middelpunt van de cirkel is. Zoek dan naar gelijke hoeken in de tekening. Schrijf het hele bewijs op!

Bovenstaande stelling is genoemd naar de Griekse wiskundige Thales (± 600 voor Chr.). Thales' stelling geldt ook andersom. Formuleer de stelling in dat geval:

II) Als *ABC* een driehoek is met $\angle ABC = 90°$, dan
....
....
....



Werkblad

3 We zullen deze bewering indirect bewijzen (d.w.z. we zullen ervan uitgaan, dat de bewering nìet waar is).
Laten we aannemen, dat bewering 2 niet waar is en dat er een tegenvoorbeeld is (zie figuur 2). Dus in figuur 2 geldt: $\angle ACB = 90°$, maar C ligt niet op de cirkel waarvan AB middellijn is. Dan nemen we het punt waar de cirkel en AC elkaar snijden (laten we het punt C' noemen).

Hoe groot is $\angle AC'B$? ....
En wat valt je op bij de driehoek $CC'B$? ....
Wat is de tegenspraak? ....

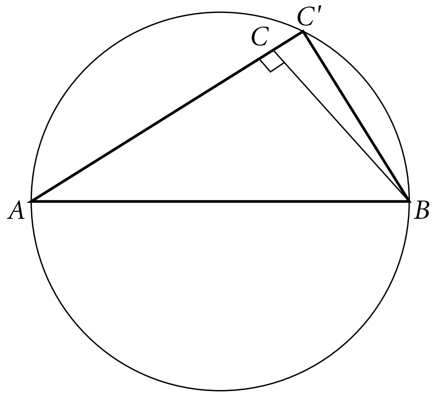
De tegenspraak komt doordat we aannemen dat C en C' niet gelijk zijn. Dus dit kan niet waar zijn, C moet op de cirkel liggen. QED

Thales' stelling laat een nieuwe methode zien om rechthoekige driehoeken te construeren. Gebruik die methode om de volgende problemen op te lossen. Maak daarbij twee soorten tekeningen: één in klad die je helpt de vraag te begrijpen en de stappen van de constructie te bedenken, en één met passer en liniaal.

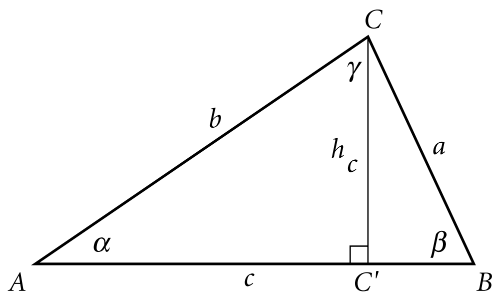
Om over driehoeken te kunnen praten gebruiken wij de volgende tekens (zie figuur 3).
A, B, C: geven hoekpunten van een driehoek aan. De daarbij behorende hoeken worden als α, β en γ genoteerd. Als de driehoek een rechte hoek heeft, dan is dat de hoek bij C, dus $\gamma = 90°$.
De tegenoverliggende zijden worden met a, b en c aangegeven. A is tegenover a, B tegenover b en C tegenover c. De lijn door C die een hoek van 90° met c maakt, heet de hoogtelijn op c. Zijn lengte wordt aangegeven met h_c, zijn snijpunt met c is C'. Voor A' en B' geldt hetzelfde.

4 Construeer een driehoek met een rechte hoek waarbij $c = 8$ en $a = 5$.

5 a. Construeer een driehoek met een rechte hoek waarin $c = 8$ en $h_c = 2$.
b. Hoe groot zijn de hoeken van die driehoek? (Berekenen, en wel zonder geodriehoek!)



Figuur 2



Figuur 3

6 Construeer een driehoek waarbij a, h_b en h_c gegeven zijn. Controleer of er altijd een oplossing bestaat voor willekeurige a, h_b en h_c.

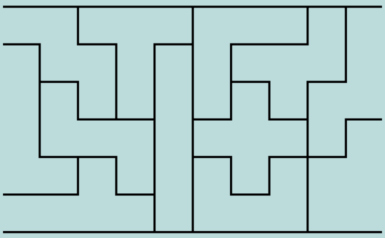
7 Construeer een driehoek waarbij a, h_b en γ gegeven zijn.

8 Bewijs: In een driehoek liggen A' en B' even ver van het midden van AB.

* Auteur: Zs. Ruttkay, VIERKANT wiskundeclubs 1994-95.

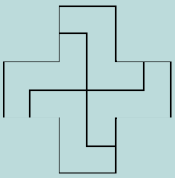
Recreatie

Opgave 663

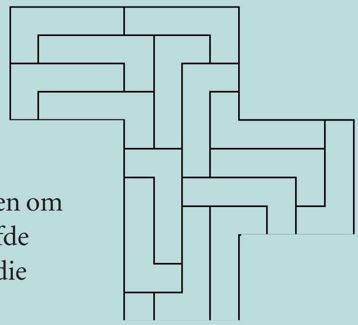


Een onderdeel van de meetkunde is het verdelen van figuren in gelijke delen. Ook de betegelingen behoren hiertoe. Een geliefd onderwerp bij puzzelaars zijn de polyomino's. In het bijzonder de pentomino's, die uit vijf vierkantjes bestaan. In de rechthoek hiernaast vindt u de 12 verschillende pentomino's. Let erop dat u de stukjes ook mag omdraaien !

In 1965 schreef Solomon W. Golomb hier een boek over. In 1994 is dit boek herdrukt en van vele aanvullingen voorzien: 'Polyominoes: Puzzles, Patterns, Problems, and Packings'. (ISBN 0-691-08573-0).
Sinds oktober 1994 is er een tijdschrift over pentomino's. Het wordt in eigen beheer uitgegeven door
Rodolfo Marcelo Kurchan
Parana 960 5''A''
(1017) Buenos Aires ARGENTINA.
Voor $25 ontvangt u 5 afleveringen met zeer originele pentomino-problemen (en oplossingen !).



Onlangs heeft *Maarten Bos*, Groningen het volgende probleem opgelost, waarvan ik hier de resultaten mag publiceren. Als we een puzzelstukje vergroten met factor $k = 2$, dan kunnen we het soms bedekken met vier dezelfde pentomino's. Zie het voorbeeld links.



Nemen we $k = 4$, dan zijn er weer vele oplossingen om de vergrote pentomino te bedekken met 16 dezelfde pentomino's. Als voorbeeld rechts de vergrote F, die bedekt is met 16 keer de L.

Nu komt het mooiste: voor $k = 3$ zijn er maar TWEE oplossingen. Als voorbeeld de triviale oplossing, waarbij een vergrote I is bedekt met 9 I's.

Als opgave voor de komende TWEE maanden: wat is de andere oplossing in het geval $k = 3$?
Veel vakantie-puzzel-plezier en … vergeet u niet op tijd in te zenden ? De hele familie kan meepuzzelen.

Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan
Jan de Geus
Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.

Oplossing 660

De opgave betrof de ‘apex card trick’ uit het boek Mathematical Carnival van Martin Gardner. Op de onderste rij lagen de kaarten 9, 7, 1, 5 en 8. Boven twee kaarten komt een kaart te liggen ter waarde som modulo 9. Voor 0 schrijven we een 9. De voorspelling van de bovenste kaart heeft te maken met de Driehoek van Pascal. Met vijf kaarten op de onderste rij hebben we de vijfde rij in de Driehoek van Pascal nodig:
$1 - 4 - 6 - 4 - 1$. Het apex-getal wordt dan
$1 \cdot 9 + 4 \cdot 7 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 8 = 71$ en modulo 9 wordt dat een 8.
Martin Gardner schrijft dat de Nederlander C.J.H. Wevers de puzzel met de 36 kaarten heeft bedacht. (Kent iemand deze puzzelaar?) Martin vond waarschijnlijk de oplossing
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 op de onderste rij. Elk getal komt nu precies 4 keer voor !
In totaal zijn er 153 verschillende oplossingen (linker kaart $\leq$ rechter kaart). Hierbij zijn 9 oplossingen die uit 8 verschillende getallen bestaan. Een kleine selectie uit de oplossingen (steeds wordt de onderste rij gegeven):

12345678	**24681357**	**47379894**
12435432	**31118886**	**48372615**
12595296	**32159649**	**52629195**
12857817	**32287419**	**62957349**
13518867	**34445556**	**64219389**
15263748	**35654346**	**79284438**
15672348	**37772226**	**79587468**
21354687	**42618375**	**84398679**
21436587	**42863175**	**85659798**
23263767	**46227837**	**85771269**

Een wiskundige theorie die direct tot een oplossing leidt, is niet gevonden. Wel zijn er een aantal merkwaardigheden gevonden.
*** Als u de 9 oplossingen, waarbij de getallen verschillend zijn, ook echt met kaarten legt, dan zult u de vaste positie van de 3, 6 en 9 opmerken. (*Wil Huyben-v.d. Berg* (15), Eemnes).
*** Als $a_1, a_2, \ldots, a_8$ een oplossing is met 8 verschillende getallen, dan geldt $a_1 + a_8 = 9$, $a_2 + a_7 = 9$, $a_3 + a_6 = 9$ en $a_4 + a_5 = 9$. (Vele oplossers).
*** Als $a_1, a_2, \ldots, a_8$ een oplossing is, dan is ook $pa_1, pa_2, \ldots, pa_8$ een oplossing, waarbij p onderling priem is met 9. Dit alles natuurlijk modulo 9. (*W.M. Banis* (20), Laren, *Wobien Doyer* (49), Leiden en onze prijswinnaar).

Alleen onze winnaar heeft het probleem geheel gegeneraliseerd en vond de schitterende oplossing 567891234, waarbij mod 9 elk cijfer precies 5 keer voorkomt.
Met 55 punten wint deze maand de boekenbon:

Jan Verbakel
Triangel 9
6093 GZ Heythuysen.

Hartelijk gefeliciteerd en nogmaals dank voor je resultaten.

vervolg van blz. 299 ▼

In $\mathbb{R}^4$ zijn twee deelverzamelingen gegeven, namelijk $S_1 = \{(1,0,0,0), (0,2,1,0), (0,0,0,1)\}$ en $S_2 = \{(0,1,0,1), (0,1,1,1), (1,0,0,0)\}$. Bepaal een verzameling $S_3 \subset \mathbb{R}^4$ met de eigenschap dat

$$\text{Opspansel}(S_1) \cap \text{Opspansel}(S_2) = \text{Opspansel}(S_3).$$

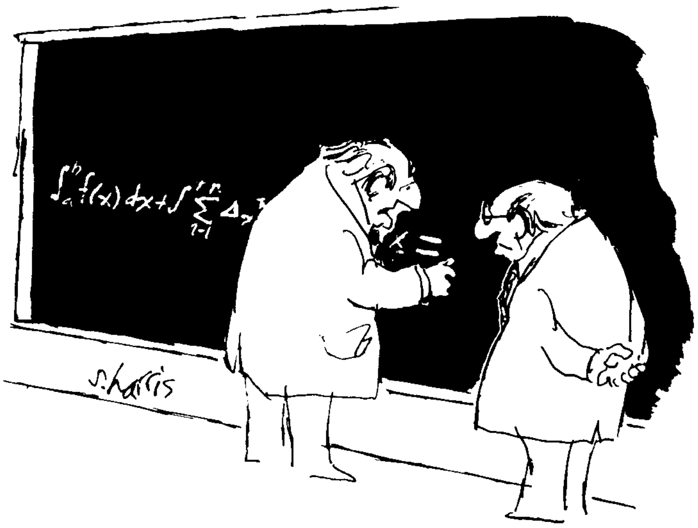
Stel dat ψ een lineaire afbeelding is van een vectorruimte V naar een vectorruimte W. Bewijs dat als de beelden van de vectoren $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ een basis vormen voor W, dan geldt dat ψ surjectief is.

berekend). Dit soort toepassingen, maar ook toepassingen van differentiëren, integreren, goniometrie etc. zouden meer aan de orde moeten komen. Naar mijn idee kan een WA-leerling in de praktijk namelijk veel meer met zijn wiskundekennis dan een WB-leerling: een WB-leerling heeft veel formules geleerd en ingevuld maar hij heeft ze nooit echt toegepast.

Natuurlijk is er ook genoeg op te noemen dat me wel goed is bevallen. Ik vond bijvoorbeeld de stof erg uitgebreid: veel 'bijzondere' onderwerpen, zoals oneigenlijke limieten en oneigenlijke integralen, inverses van goniometrische functies en integratie van parametervoorstellingen kwamen aan de orde. Ook werd in de ruimtemeetkunde veel aandacht besteed aan zowel de meetkundige als analytische aanpak van problemen. Wat dat betreft ben ik (tot nu toe) juist wel goed op de studie wiskunde voorbereid: aan alle onderwerpen die bij het vak analyse (het 'belangrijkste' vak) tot nu toe zijn behandeld, heb ik op de middelbare school al even mogen 'ruiken'. Een voorbeeld van een begrijpelijke, met WB-stof te vergelijken, opgave uit het analyse-tentamen:

Tenslotte wil ik nog opmerken dat ik sinds ik wiskunde ben gaan studeren heel anders tegen wiskunde op de middelbare school ben gaan aankijken. Op de universiteit ligt het tempo veel en veel hoger dan op het vwo waardoor het is gaan lijken alsof ik op het vwo niet erg veel heb geleerd, terwijl ik vorig jaar nog dacht: 'Wat leer ik toch veel bij WB'.

Daarom is het belangrijk niet alleen te weten wat de mening van een wiskunde-student is, maar ook die van iemand die het vak niet echt nodig heeft voor een vervolgstudie. Al met al vind ik toch dat dieper op de stof zou moeten worden ingegaan en dat er meer toepassingen moeten worden behandeld.



"This is the part I always hate."

bron: 1980 by Sidney Harris / *American Scientist*

In de ontwikkeling van $(1+x)^{20}$ is de coëfficient van x^k is tweemaal zo groot als die van x^{k-1}. Bepaal k.